Reinhard Kürbis

Mathematische Programmierung als Instrument der Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage

~~1967~~
1966

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547215_0013

MATHEMATISCHE PROGRAMMIERUNG ALS INSTRUMENT DER PRODUKTIONSPROGRAMMPLANUNG BEI STOCHASTISCHER NACHFRAGE

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
durch die Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

REINHARD KÜRBIS

aus

Dortmund

1967

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Prof. Dr. L.PACK
2. Berichterstatter: Prof. Dr. H.GÜLICHER
Dekan: Prof. Dr. L.MÜLHAUPT
Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dez. 1966

INHALTSÜBERSICHT

Seite

Einleitung 1

I. Teil: Produktionsprogrammplanung im Mehrproduktbetrieb bei stochastischer Nachfrage 10

A. Die Aufgabe der Produktionsprogrammplanung im Rahmen des unternehmerischen Planungssystems 10

I. Ausgangspunkt und Aufgabe unternehmerischer Planung 10

1. Die Zielsetzung der Unternehmung als Ausgangspunkt der Planung 10

2. Die Aufgabe unternehmerischer Planung 17

II. Produktionsprogrammplanung im Mehrproduktbetrieb 18

1. Die Aufgabe der Produktionsprogrammplanung 18

2. Der Mehrproduktbetrieb 19

3. Der globale Charakter der Produktionsprogrammplanung 20

B. Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage als Aufgabe marktorientierter Unternehmungen 23

I. Marktorientierte Unternehmungen 23

II. Der Begriff der stochastischen Nachfrage 25

III. Die Vorhersage der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Eintritt möglicher Nachfragemengen als Voraussetzung einer Planung des Produktionsprogrammes bei stochastischer Nachfrage 25

1. Vorhersage bei gleichbleibenden Verhältnissen 26

2. Vorhersage mittels Zeitreihenanalyse 26

3. Assoziative Vorhersage 28

4. Subjektive Vorhersage 28

II. Teil: Mathematische Programmierung 33

A. Definition der mathematischen Programmierung und Einteilung der mathematischen Programmierungsmethoden 33

I. Definition 33

II. Einteilung 33

B. Simultane Programmierung 34

I. Lineare Programmierung 34

1. Allgemeiner Ansatz 34

2. Ganzzahlige lineare Programmierung..35

3. Stochastische lineare Programmierung 36

II. Nichtlineare Programmierung 37

1. Vorbemerkung 37

2. Mathematische Formulierung der quadratischen Programmierung 38

3. Hinweise auf Lösungsverfahren 38

C. Stufenweise Programmierung 40

I. Die generelle Struktur der 'dynamischen' Programmierung 40

II. Hinweise auf Lösungsverfahren 42

III. Teil: Entwicklung einer Folge von Entscheidungsmodellen zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage 44

A. Die modelltheoretisch bedingten generellen Prämissen der Untersuchung 44

I. Die Annahmen bezüglich der Beschaffungsbedingungen 44

II. Die Annahmen bezüglich der Finanzierungsbedingungen 44

III. Die Annahmen bezüglich der Produktionsbedingungen 45

B. Einstufige stochastische Entscheidungsmodelle 46

I. Einführung stochastischer Nachfrage in das Standardmodell der linearen Produktionsprogrammplanung 46

1. Das Standardmodell der linearen Produktionsprogrammplanung 46

2. Formulierung des stochastischen Modelles 48

a. Formulierung der Zielfunktion..49

b. Formulierung der Nebenbedingungen 53

3. Hinweise auf Lösungsverfahren.....53

4. Interpretation der Modellergebnisse 58

II. Modifikation des Modelles durch Einführung von Mindest- und Höchstmengen 59

1. Formulierung der Zielfunktion 61

2. Formulierung der Nebenbedingungen 64

3. Hinweise auf Lösungsverfahren 64

III. Die Berücksichtigung gegenseitiger Abhängigkeiten der Nachfragemengen nach den Erzeugnissen im Produktionsprogramm 72

1. Das gestellte Problem 72

2. Formulierung des Modelles 76

a. Formulierung der Zielfunktion 76

b. Formulierung der Nebenbedingungen....80

c. Hinweise auf Lösungsverfahren 81

3. Interpretation der Modellergebnisse.....88

IV. Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage unter Beachtung von Anpassungsmöglichkeiten der Unternehmung 89

1. Arten von Anpassungsprozessen 89

a. Intensitätsmäßige Anpassung 89

b. Zeitliche Anpassung 90

c. Quantitative Anpassung 90

2. Die Notwendigkeit einer Berücksichtigung von Anpassungsmöglichkeiten im Rahmen der Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage 91

3. Mögliche Arten des Vorgehens zur Berücksichtigung von Anpassungsprozessen bei der Planung des Produktionsprogrammes im Falle stochastischer Nachfrage ..94

a. Sukzessive Planung von Produktionsprogramm und Anpassungsprozessen 94

b. Simultane Planung von Produktionsprogramm und Anpassungsprozessen ...103

b_1. Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage und intensitätsmäßiger Anpassung ...103

b_2. Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage und zeitlicher Anpassung 108

b_3. Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage und quantitativer Anpassung 110

4. Die Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage unter Berücksichtigung einer Kombination von intensitätsmäßiger, zeitlicher und quantitativer Anpassung 112

a. Formulierung des Modells 114

b. Hinweise auf Lösungsverfahren 116

C. Ein mehrstufiges stochastisches Entscheidungsmodell zur Behandlung des Problems einer simultanen Planung von Produktionsprogramm, Preisen und Reklame 119

I. Die Notwendigkeit einer simultanen Planung von Produktionsprogramm, Preisen und Reklame 119

1. Der Begriff der Reklame 119

2. Die Problematik einer isolierten Planung des Produktionsprogrammes 120

3. Die Unzulänglichkeit einer statischen Analyse des Problems der simultanen Preis-, Mengen- und Reklameplanung 124

II. Die Behandlung des Problems der simultanen Planung von Preisen, Produktionsprogramm und Reklameeinsatz als stochastischen Prozeß 127

1. Einführung von Risiko in das Problem der simultanen Bestimmung von Preisen, Produktionsprogramm und Reklameeinsatz 127

2. Stochastische Prozesse 130

3. Behandlung des Problems als MARKOFF-Prozeß 131

a. MARKOFF-Prozesse 131

b. Die Modellvorstellung 132

c. Hinweise auf Lösungsverfahren 137

c_1. Der HOWARD-Algorithmus 138

c_2. Der Algorithmus von WOLFE und DANTZIG 141

c_3. Kurzer Vergleich der praktischen Effizienz der beiden Verfahren ..142

4. Durchrechnung eines Beispiels mit dem HOWARD-Algorithmus 143

a. Übersicht über die Daten des Problems 143

b. Durchführung der Rechenoperationen ..154

c. Interpretation der Modellergebnisse .156

Schlußbemerkung 159

Literaturverzeichnis 163

Zeitschriften-Abkürzungsverzeichnis 174

Einleitung

Die mathematische Programmierung hat sich in den letzten Jahren zu einem wertvollen Instrument sowohl wirtschaftswissenschaftlicher Forschung als auch praktischer Unternehmungs- und Wirtschaftspolitik entwickelt; zahlreiche ökonomische Probleme konnten mit ihrer Hilfe behandelt und/oder gelöst werden.

Insbesondere gilt dies für die Produktionsprogrammplanung im Mehrproduktbetrieb, wo die traditionelle Theorie den hier auftauchenden Problemen mit kaum mehr als formalen Lösungsvorschlägen entgegentreten konnte. Die gerade in diesem wichtigen Bereich des unternehmerischen Planungssystems zahlreich auftretenden Interdependenzen zwischen Funktionsbereichen und Entscheidungsvariablen legen es nahe, sich gerade hier der mathematischen Programmierung als problemadäquatem Planungsinstrument zu bedienen. Tatsächlich wurden diese Verfahren (vor allem die lineare Programmierung) auch schon sehr früh zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme angewandt; hierbei beschränkte sich die Analyse aber im wesentlichen auf den deterministischen Fall, eine Berücksichtigung des Risikos bei der Produktionsprogrammplanung erfolgte nur sehr spärlich. Dies war auch so lange nicht notwendig, wie man hierbei - in Weiterführung der traditionellen Theorie - für die Absatzmärkte atomistische Konkurrenz auf vollkommenen Märkten unterstellte; denn dann reduziert sich das Problem der Produktionsprogrammplanung auf eine Analyse der technischen Produktionsbedingungen[1]. Zwar können auch hier Zufallsprozesse eine Rolle spielen. So lassen sich z.B. die Produktionskoeffizienten oder die Kapazitäten ex ante nicht genau

---

1) Vgl. H.ALBACH, Produktionsplanung auf der Grundlage technischer Verbrauchsfunktionen, in: Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (Heft Nr. 105), Köln und Opladen 1962, S. 45.

bestimmen, weshalb sie oftmals als Zufallsvariable behandelt werden müßten; in den meisten praktischen Fällen kann jedoch davon ausgegangen werden, daß die Streuung dieser Zufallsgrößen so gering ist, daß sie als deterministische Parameter behandelt werden können. Kann insofern bei den Produktionsbedingungen durchaus noch von 'vollkommener Voraussicht' ausgegangen werden, so ist dies für die Absatzbedingungen einer Unternehmung im praktischen Wirtschaftsleben nur noch in Ausnahmefällen möglich. Dies gilt insbesondere für die marktorientierten Unternehmungen (im Gegensatz zu den auftragsorientierten), bei denen die bei der Unternehmung wirksam werdende Nachfrage zeitlich der Produktion nachgelagert ist und das Produktionsprogramm (hier als Verkaufsprogramm gesehen) weitgehend auf Schätzungen beruht. Dieses Umstandes wurde man sich auch schon sehr bald bei der praktischen Anwendung der mathematischen Programmierung auf die Planung des Produktionsprogrammes bewußt und versuchte, ihm in irgendeiner Weise Rechnung zu tragen. Da wegen der besonderen Effizienz der Simplex-Methode auf praktische Probleme vor allem die lineare Programmierung angewandt wurde (und heute noch wird), geschah dies in erster Linie mit Hilfe des parametrischen linearen Programmierens und mit Sensibilitätsanalysen bei linearen Programmen. Die Literatur hierzu ist entsprechend der praktischen Bedeutung dieses Problems recht umfangreich[1]. Zwar kann mit Hilfe dieser

---

1) Stellvertretend seien hier etwa genannt: E.SIMONS, A Note on Parametric Linear Programming, in: Man. Sci. (8) 1962, S. 355 ff.; A.CHARNES, W.W. COOPER, B.MELLON, A Model for Programming and Sensivity Analysis in an Integrated Oil Company, in: Econometrica (22) 1954, S. 192 ff.; S.BARNETT, Stability of the Solution to a Linear Programming Problem, in: Op. Res. (10) 1962, S. 219 ff.; W. KERN, Die Empfindlichkeit linear geplanter Produktionsprogramme, in: Betriebsführung und Operations Research (Herausg.: A.ANGERMANN), Frankfurt/M. 1963, S. 66 ff.; J.E.KELLY, Parametric Programming and the Primal-Dual Algorithm, in: Op. Res. (7) 1959, S. 327 ff.; M.COURTILLOT, On Varying All the Parameters in a Linear Programming Problem and Sequential Solutions of a Linear Programming Problem, in: Op. Res. (10) 1962, S. 471 ff.

Verfahren eine Aussage über den Funktionalzusammenhang zwischen den Daten des Modells und der Optimallösung getroffen werden. Eine eigentliche Lösung der Produktionsprogrammplanung unter Risiko wird hiermit jedoch nicht erreicht. Denn stimmt die Produktion nicht mit der tatsächlichen Nachfrage überein, ist sie also größer oder kleiner als die Nachfrage, was bei marktorientierten Betrieben in der Regel der Fall sein wird, so können beachtliche Kostenänderungen entstehen, die es bei der Planung des Produktionsprogrammes zu berücksichtigen gilt, wenn diese den Anspruch erheben will, im Sinne der angestrebten Zielsetzung optimal zu sein. Zwar bestände grundsätzlich auch hier die Möglichkeit, bei entsprechender Konstruktion des Modells durch eine außerordentlich verfeinerte Sensibilitätsanalyse die Lösung dieses Problems anzugehen; dies würde allerdings mit einem derart beträchtlichen Zeit- und Rechenaufwand verbunden sein, daß dieser Weg für die meisten praktischen Probleme ausscheidet, zumal eine direkte Einführung des Risikos in das Modell bedeutend schneller zum Ziele führt.

Auch der wohl bekannteste Ansatz zur Einführung von Risiko in ein Modell der Produktionsprogrammplanung, nämlich der von R.J.FREUND[1)], trifft nicht den Kern des Problems, dem sich marktorientierte Unternehmungen, insbesondere Industriebetriebe, gegenübersehen. R.J.FREUND geht nämlich davon aus, daß die Endproduktpreise zwar gegeben, aber risikobehaftet sind, wobei jedoch die Varianz dieser Preise als bekannt angenommen wird. Eine solche Situation ist aber nicht für Industrie- (und Handels-) Unternehmungen als typisch anzusehen, da in der Praxis hier gerade genau bekannte, starre Preise (Katalog- und Listenpreise usw.) vorherrschen; als Zufallsvariable

1) R.J.FREUND, The Introduction of Risk into a Programming Model, in: Econometrica (24) 1956, S. 253 ff.

sind hier also nicht die Preise, sondern die Nachfragemengen anzusehen. Durchaus problemadäquat kann das FREUND'sche Modell für landwirtschaftliche Betriebe sein, wo zahlreiche kleinere Anbieter gleichzeitig auftreten und unsichere Absatzpreise eine oft zu beobachtende Erscheinung darstellen.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchung ist gemäß den bisherigen Ausführungen ein zweifacher. Einmal sollen auf theoretischer Ebene die Probleme analysiert werden, die bei der Produktionsprogrammplanung in Mehrproduktunternehmungen auftauchen, wenn die Nachfragemengen nicht genau bekannt, sondern Zufallsvariablen sind. Zum anderen soll versucht werden, Verfahren aufzuzeigen, die es gestatten, das Problem der optimalen Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage auch einer praktischen Lösung zuzuführen. Ein solches Vorgehen entspricht der heutigen Tendenz der Betriebswirtschaftslehre zur "Schaffung einer operationalen Theorie ...", die "bestimmte Phänomene und die zwischen ihnen bestehenden Zusammenhänge nicht nur erklärt und dadurch dem menschlichen Verständnis erschließt, sondern welche darüber hinaus die gewonnenen Erkenntnisse in einer Weise zu quantifizieren und durch die Entwicklung von Methoden der quantitativen Analyse abzusichern versucht, daß sie zur Grundlage der Überlegungen werden können, welche beim Treffen betrieblicher Entscheidungen anzustellen sind"[1].

In engem Zusammenhang mit dieser Entwicklung der Betriebswirtschaftslehre steht die zunehmende Betonung der mathematisch-funktionalen Betrachtungsweise und die Verwendung mathematischer Verfahren für die Behandlung betriebswirtschaftlicher Probleme,

---

1) L.PACK, Die Elastizität der Kosten, Grundlagen einer entscheidungsorientierten Kostentheorie, Wiesbaden 1966, S. 15.

ein Prozeß, der ständig zunimmt und auch noch eine geraume Zeit anhalten dürfte[1]. Gegen die mathematisch arbeitende Betriebswirtschaftslehre wird vielfach eingewandt, daß die Ungewißheit über die Daten im wirtschaftlichen Bereich und der qualitative Charakter ökonomischer Erscheinungen eine Verwendung exakter Verfahren ausschließen. Eine solche Argumentation ist aber nicht zwingend. Denn einmal ist nicht einzusehen, "was durch ungenaues Denken über ungenaue Zahlen gegenüber einem genauen Denken gewonnen sein soll"[2], und zum anderen "ist eine ökonomische Erscheinung nicht qualitativ an sich, sondern das qualitative Element ergibt sich primär daraus, daß es bisher nicht gelang oder daß darauf verzichtet wurde, die Ausprägungen der beobachteten Erscheinungen in meßbarer Form zu beschreiben"[3].

Andererseits ist bei der starken Betonung der mathematisch-funktionalen Betrachtungsweise und der damit verbundenen zunehmenden Mathematisierung der Wirtschaftswissenschaften im allgemeinen und der Betriebswirtschaftslehre im speziellen die Gefahr nicht zu übersehen, daß des Guten zuviel getan wird, d.h. daß nun versucht wird, alle wirtschaftlichen Vorgänge bis ins letzte Detail zu erfassen und in einem mathematischen Modell abzubilden. Denn ein solcher 'L'art pour l'art'-Standpunkt ist genauso falsch, weil ökonomisch nicht sinnvoll, wie das andere Extrem, nämlich eine Unternehmung und darüber hinaus allgemein Wirtschaftsprozesse als 'Schwarzen Kasten'

---

1) Vgl. L.PACK, Der Wandel im betriebswirtschaftlichen Denken, in: IBM-Nachrichten (16) 1966, S. 243.

2) W.KRELLE, Gelöste und ungelöste Probleme der Unternehmensforschung, in: Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (Heft 105), Köln und Opladen 1962, S. 10.

3) L.PACK, Der Wandel im betriebswirtschaftlichen Denken, a.a.O., S. 243.

aufzufassen[1], d.h. als eine abstrakte Maschine, von der zwar die Ein- und Ausgänge und deren mögliche Zustände, nicht aber die Funktionsweise bekannt sind[2]. Der ökonomisch richtige Standpunkt liegt sicherlich zwischen diesen beiden extremen Auffassungen; denn das Problem der Anwendbarkeit und des Ausmaßes der Verwendung mathematischer Verfahren ist insbesondere in der Betriebswirtschaftslehre eine reine Zweckmäßigkeitsfrage, über die nicht dogmatisch, sondern pragmatisch entschieden werden sollte.

Für den Gang der Untersuchung ist es zunächst erforderlich, darzustellen, worin die Aufgabe der Produktionsprogrammplanung im Rahmen des unternehmerischen Planungssystems liegt, welche Zusammenhänge dabei zu beachten sind, weiterhin was unter stochastischer Nachfrage verstanden werden soll und welche Möglichkeiten bestehen, hierüber eine Vorhersage zu treffen. In einem zweiten Teil kann dann auf das der Lösung des zu untersuchenden Problems adäquate Instrumentarium, die mathematische Programmierung, eingegangen werden. Hierbei kann auf eine Untersuchung der Frage, ob die mathematische Programmierung überhaupt als ein geeignetes Instrument der ökonomischen Planung angesehen werden kann, verzichtet werden. Denn es läßt sich kaum ein Phänomen des realen wirtschaftlichen Lebens vorstellen, auf welches das auf den Arbeiten von A.WALD und J.v.NEUMANN aufbauende BELLMAN'sche Optimalitätsprinzip nicht angewendet werden kann. Diesem Prinzip lassen sich aber sowohl das Dualitätsprinzip der linearen Programmierung als auch das KUHN-TUCKER-Theorem der quadratischen Programmierung subsumieren[3],

---

1) Vgl. ST.BEER, Kybernetik und Management, Frankfurt/M. 1963, S. 71.

2) Vgl. ST.BEER, ebenda, S. 67 ff.

3) Vgl. R.BELLMAN und ST.DREYFUS, Applied Dynamic Programming, Princeton, N.J. 1962, S. 340 ff.

wodurch sich auch gleichzeitig die mathematische Programmierung nahtlos in das klassische System der mathematischen Optimierungstechniken einfügen läßt[1].

In dem sich anschließenden Teil III werden, ausgehend vom (deterministischen) Standardmodell der linearen Produktionsprogrammplanung, zunächst einstufige Entscheidungsmodelle zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage entwickelt, wonach dann versucht wird, im Rahmen eines mehrstufigen stochastischen Entscheidungsmodelles auch das Problem einer simultanen Planung von Produktionsprogramm, Preisen und Reklame zu analysieren und in einem mathematischen Modell abzubilden. Bei den hier entwickelten Modellen handelt es sich um Partialmodelle in dem Sinne, daß nicht der gesamte Bereich der unternehmerischen Planung im Modellansatz erfaßt wird, sondern nur ein Teilbereich des unternehmerischen Planungssystems. Zwar besteht das "Idealziel der sachlich-methodischen Bemühungen in der Betriebswirtschaftslehre ... darin, ... das Problem der totalen Unternehmensplanung in einem simultanen Modellansatz in Angriff zu nehmen und einer Lösung näher zu bringen", jedoch wendet sich die Forschung zur Zeit, weil sich ein solches Modell bis heute noch als zu kompliziert erweist, "vor allem der Entwicklung von praktikablen Partialmodellen zu"[2]. Das bedeutet nun nicht, daß auf eine Simultanplanung völlig verzichtet wird; so läßt sich etwa das mehrstufige Problem der Bestimmung des im Hinblick auf die Zielsetzung der Unternehmung

---

1) Zur Anwendung der klassischen Multiplikatormethode von LAGRANGE, insbesondere in ihrer Erweiterung durch KUHN und TUCKER, zur Lösung von Extremwertaufgaben in Form von Ungleichungen vgl. etwa H. EVERETT, Generalized Lagrange Multiplier Method For Solving Problems of Optimum Allocation of Resources, in: Op. Res. (11) 1963, S. 399 ff.; B.KLEIN, Direct Use of Extremal Principles In Solving Certain Optimizing Problems Involving Inequalities, in: Op. Res. (3) 1955, S. 168 ff.

2) L.PACK, Der Wandel im betriebswirtschaftlichen Denken, a.a.O., S. 240.

optimalen Produktions-, Preis- und Reklameprogrammes nur in einem simultanen Ansatz lösen, nur daß diese Art der Simultanplanung auf einem niedrigeren Niveau erfolgt als die totale Unternehmungsplanung[1].

Aus dem Modellcharakter der Untersuchung folgt aber weiterhin, daß gewisse (zum Teil vereinfachende) Annahmen bezüglich der Realität (insbesondere bezüglich der Beschaffungs- und Finanzierungsbedingungen) getroffen werden müssen. Denn Modelle sind nichts anderes als "gedankliche Hilfsmittel zur übersichtlichen Darstellung von unanschaulichen Objekten und komplexen Vorgängen"[2], die niemals zur vollständigen Kongruenz mit der Wirklichkeit gebracht werden können, weil sie nichts anderes als "Strukturen unseres Denkens sind"[3].

Die komplexe Struktur des Untersuchungsobjektes bringt es außerdem mit sich, daß nicht alle mit der Produktionsprogrammplanung im allgemeinen und mit der Planung des Produktionsprogrammes bei stochastischer Nachfrage im besonderen zusammenhängenden Problemkreise in allen Einzelheiten analysiert und in mathematischen Modellen abgebildet werden können, weil eine solche Aufgabe den Rahmen der vorliegenden Arbeit bei weitem überschreiten würde. So wird etwa auf eine Einbeziehung der Ablaufplanung, eines Problems, das eigentlich nur simultan mit der Produktionsprogrammplanung behandelt und gelöst werden kann, ebenso verzichtet wie auf eine Ableitung der Nachfragefunktionen aus der Präferenzstruktur der Abnehmer der von der Unternehmung angebotenen Erzeugnisse. Das Ziel der vorliegenden Untersuchung be-

---

1) Vgl. L.PACK, Der Wandel im betriebswirtschaftlichen Denken, a.a.O., S. 240.

2) A.ANGERMANN, Entscheidungsmodelle, Frankfurt/M. 1963, S. 13.

3) G.KADE, Die logischen Grundlagen der mathematischen Wirtschaftstheorie als Methodemproblem der theoretischen Ökonomie, Berlin 1958, S. 44.

steht vielmehr vor allem darin, auf einen Problemkreis hinzuweisen, der von der betriebswirtschaftlichen Forschung bisher noch allzu sehr vernachlässigt worden ist, und zu versuchen, im Rahmen einiger als geeignet erscheinender Modelle verschiedene als typisch anzusehende Probleme der Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage aufzuzeigen und Hinweise auf problemadäquate Lösungsverfahren zu geben.

Ob sich die aufgezeigten Verfahren für die Lösung der in der Praxis wesentlich vielschichtigeren Probleme der Produktionsprogrammplanung mit Erfolg anwenden lassen, bleibt abzuwarten. Zur Zeit ist jedenfalls auch die beste operationale Theorie noch nicht in der Lage, einen vollständigen Ersatz für das unternehmerische Fingerspitzengefühl darzustellen. "Aber es ist schon ein Gewinn, wenn es gelingt, die Grenze des Erkennbaren und des der Ratio zugänglichen Bereiches, wenn auch nur ein wenig, hinauszuschieben"[1].

---

1) E.SCHNEIDER, Status - Der Weg der Betriebswirtschaftslehre in den letzten 25 Jahren, in: Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft (Ausgewählte Aufsätze), Tübingen 1964, S. 457.

I. Teil: Produktionsprogrammplanung im Mehrproduktbetrieb bei stochastischer Nachfrage

A. Die Aufgabe der Produktionsprogrammplanung im Rahmen des unternehmerischen Planungssystems

I. Ausgangspunkt und Aufgabe unternehmerischer Planung

1. Die Zielsetzung der Unternehmung als Ausgangspunkt der Planung

Die klassische Theorie der Unternehmung geht von der Voraussetzung aus, daß Gewinnmaximierung im Sinne einer Maximierung der positiven Differenz zwischen Erlösen und Kosten einer Wirtschaftsperiode eine eindeutige und die einzige Zielsetzung der Unternehmung sei[1].

Nun kann aber sicherlich kein Zweifel darüber bestehen, daß der Begriff 'Gewinnmaximierung' als Zielsetzung nicht ausreicht, um die Vielfalt unternehmerischen Verhaltens im praktischen Wirtschaftsleben ausreichend zu erfassen[2]. Denn einmal lassen sich die Unternehmer auch von nichtmonetären Zielvorstellungen leiten, wie dies etwa im Streben nach Macht und Unabhängigkeit, nach Pflege der Firmen-

---

1) Die zuweilen als selbstverständlich angesehene Identität von Gewinnmaximierung und Rentabilitätsmaximierung als unternehmerische Zielsetzung ist nur dann gegeben, wenn man von einem konstanten Eigenkapital pro Planperiode ausgeht. Vgl. L.PACK, Maximierung der Rentabilität als preispolitisches Ziel, in: Festschrift für E.GUTENBERG, Wiesbaden 1962, S. 75 ff.

2) Vgl. E.SCHNEIDER, Bemerkungen zu einigen neueren Entwicklungen der Theorie der Unternehmung, in: Weltwirtschaftliches Archiv (83) 1959, S. 96, wieder abgedruckt in: Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft, a.a.O., S. 450.

tradition oder auch nach gesellschaftlicher Billigung zum Ausdruck kommt, und zum anderen besteht die Möglichkeit, daß in dem Falle, in dem die Entscheidungen in einer Unternehmung nicht von einer einzigen Person getroffen werden, unterschiedliche Handlungsmotive maßgeblich sein und Zielkonflikte auftreten können[1].

Auch wenn man davon ausgeht, daß die Unternehmer sich von monetären Zielvorstellungen leiten lassen und unterstellt, wie wir es im folgenden tun wollen, daß die Unternehmung von einem einheitlichen Willen gesteuert wird, dann läßt die Ungewißheit der Erwartungen des Unternehmers bei der Aufstellung seiner Wirtschaftspläne oft andere Zielsetzungen als sinnvoller erscheinen als das Streben nach maximalem Gewinn.

Denn 'Gewinnmaximierung' ist nur dann ein operativ eindeutig erreichbares Ziel, wenn vorausgesetzt werden kann, daß für den Unternehmer die Möglichkeit besteht, alle Variablen, von denen das Resultat seines Verhaltens abhängt, zu kontrollieren[2]. Dies ist im wesentlichen aber nur bei vollkommener Voraussicht der Fall, d.h. nur dann, wenn der Unternehmer "alle ihm zur Verfügung stehenden Handlungsalternativen kennt, einschließlich aller möglichen Handlungsresultate"[3], ein Ungewißheitsproblem also nicht existiert. Nun kann aber sicherlich kein Zweifel

---

1) Vgl. H.KOCH, Betriebliche Planung, in: Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1961, S. 17/18; C.M.WHITE, Multiple Goals in the Theory of the Firm, in: Linear Programming and the Theory of the Firm (Herausg.: K.E.BOULDING and W.A.SPIVEY), New York 1960, S. 181 ff.; L.PACK, Rationalprinzip und Gewinnmaximierung, in: ZfB (31) 1961, S. 207-220, S. 281-290, insbes. S. 209.

2) Vgl. O.MORGENSTERN, Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft, Wien und München 1963, S. 75.

3) G.KADE, Die Grundannahmen der Preistheorie, Berlin und Frankfurt/Main 1962, S. 79 (im Original gesperrt gedruckt).

darüber bestehen, daß die Prämisse vollkommener Voraussicht in der Regel in der Praxis nicht erfüllt ist; denn die Daten, auf denen die Unternehmer ihre Planungsüberlegungen aufbauen, sind meist mehr oder weniger ungewiß[1].

Ist einer bestimmten Handlung nicht mehr ein ganz bestimmtes Ergebnis eindeutig zugeordnet, wie dies bei vollkommener Voraussicht der Fall ist, sondern nur eine Menge möglicher Resultate, wobei der Eintritt der Entscheidungsergebnisse einer Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt[2], und nimmt man an, daß diese Verteilung dem Entscheidungssubjekt bekannt ist, dann kann an die Stelle der Gewinnmaximierung die Maximierung des Erwartungswertes des Gewinnes treten. Hierbei ist jedoch auf Grund der Tatsache, daß der Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung dem arithmetischen Mittel einer Häufigkeitsverteilung in der Weise entspricht, in der die Wahrscheinlichkeiten den relativen Häufigkeiten entsprechen, zu beachten, daß der sich ergebende Mittelwert nur dann annähernd gleich dem Erwartungswert ist, wenn sich die Entscheidungen

---

1) Die neuere Unternehmungstheorie unterscheidet nach dem Grad der Information üblicherweise zwischen Entscheidungen unter Sicherheit, unter Risiko und unter Unsicherheit. Vgl. hierzu etwa: C.W.CHURCHMAN, Decision and Value Theory, in: Progress in Operations Research, Bd. I (Herausg.: R.L.ACKOFF), New York 1961, S. 35 ff.; H.CHERNOFF und L.E.MOSES, Elementary Decision Theory, New York 1959; D.W.MILLER und M.K.STARR, Executive Decisions and Operations Research, Englewood Cliffs, N.J. 1960; D.BLACKWELL und M.A.GIRSHIK, Theory of Games and Statistical Decisions, 2. Aufl., New York und London 1961; J.MARSHAK, Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility, in: Econometrica (18) 1950, S. 111 ff.

2) Vgl. auch R.D.LUCE und H.RAIFFA, Games and Decisions, New York 1957, S. 13; W.KROMPHARDT, R. HENN, K.FÖRSTNER, Lineare Entscheidungsmodelle, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S. 306.

auf Ereignisse beziehen, die genügend häufig sind. Gleichzeitig impliziert dies, daß die für die Unternehmung ungünstigen Ereignisse, auch wenn sie mehrmals hintereinander auftreten, nicht derart ungünstig sein dürfen, daß sie den Ruin des Entscheidungssubjektes bedeuten.

Während nun im Falle ausreichend häufiger Wiederholung einer Entscheidung mit zufallsabhängigen Ergebnissen die Maximierung der mathematischen Erwartung des Gewinnes ein "zwingendes Gebot der Rationalität" darstellt, weil "eine Möglichkeit zu verschiedenem Verhalten entsprechend persönlicher Risikoscheu oder Risikofreude"[1] nicht besteht, kommt jedoch im Falle einmaliger Entscheidungen dagegen "der Grad von Risikoscheu und Risikofreude mit ins Spiel. Ohne einen Entschluß über das zu übernehmende Risiko kann das optimale Verhalten jetzt überhaupt nicht abgeleitet werden"[2]. Da bei einmaligen Entscheidungen nicht unbedingt damit gerechnet werden kann, daß sich die positiven und negativen Abweichungen vom Erwartungswert ausgleichen, weil nur bei häufiger Wiederholung einer Entscheidung eine Übereinstimmung des Erwartungswertes der tatsächlich eintretenden Gewinngrößen mit dem Durchschnitt der auf lange Sicht effektiv realisierten Gewinne mit hinreichender Sicherheit eintritt, ist es durchaus naheliegend, bei einer einmaligen Entscheidung auf eine Berücksichtigung von Wahrscheinlichkeiten zu verzichten und so vor-

---

1) W.KRELLE, Preistheorie, Tübingen und Zürich 1961, S. 589.

2) W.KRELLE, ebenda; ähnlich auch W.WITTMANN, Unternehmung und unvollkommene Information, Köln und Opladen 1959, S. 154; E.HEINEN, Die Zielfunktion der Unternehmung, in: Festschrift für E.GUTENBERG, Wiesbaden 1962, S. 35; O.MORGENSTERN, Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft, a.a.O., S. 112; J.v.NEUMANN und O.MORGENSTERN, Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961, S. 10/11.

zugehen, als ob sie unbekannt seien[1].

Das wohl bekannteste Kriterium für diesen Fall von Entscheidungen unter Unsicherheit ist das auf den Arbeiten von A.WALD und J.v.NEUMANN aufbauende Minimaxprinzip[2]. Stehen insgesamt m Strategien zur Verfügung und können insgesamt n Zustände eintreten, dann wird ein außerordentlich vorsichtig handelndes Entscheidungssubjekt unter den relativ ungünstigsten Ergebnissen das relativ günstigste auswählen, d.h.

$$\max_i \min_j (u_{ij}) \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, m, \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$ [3],

wobei ein Element der Matrix (u_{ij}), $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$, einen Gewinnkoeffizienten bezeichnet, "mit dem der Schnitt der i-ten Strategie mit dem Eintritt des j-ten Zustandes bewertet wird"[4].

Dieses Prinzip erscheint nur in solchen Situationen sinnvoll, wo das Eintreffen des schlechtest-möglichen Ergebnisses die Existenz des Entscheidungssubjektes vernichten kann, wie dies etwa in gewissen militärischen Situationen zuweilen der Fall zu sein pflegt; als Kriterium für rationale Entscheidungen im praktischen Wirtschaftsleben hat es wegen des ihm innewohnenden extremen Pessimismus nur geringe Bedeutung. Andere - weniger pessimistische - Kriterien sind vor allem das von J.NIEHANS und L.SAVAGE unabhängig voneinander entwickelte Prinzip der Minimierung der maximalen Enttäuschung[5]:

---

1) Vgl. W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 90.

2) Vgl. A.WALD, Statistical Decision Functions, 5. Aufl., New York und London 1964, insbes. S. 25 und S. 52 ff.; J.v.NEUMANN und O.MORGENSTERN, Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, a.a.O., S. 94 ff.

3) Vgl. K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie und dynamisches Programmieren, Meisenheim/Glan 1964, S. 12.

4) K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, ebenda.

5) Vgl. hierzu vor allem W.WITTMANN, a.a.O., S. 72 ff. und S. 153; D.BLACKWELL und M.A.GIRSHICK, a.a.O., S. 114 ff.; W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 617 ff.

$$\max_i \min_j (v_{ij}) \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, m, \\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

wobei

$v_{ij} = \left[\max_j (u_{ij}) - u_{ij} \right]$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, und

das Pessimismus-Optimismus-Kriterium von L.HURWICZ:

$$\max_i \left[\alpha u_{ij}^{max} + (1-\alpha)\, u_{ij}^{min} \right], \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

wobei α den sogenannten Optimismus-Koeffizienten des Entscheidungssubjektes und u_{ij}^{max} den größten bzw. u_{ij}^{min} den kleinsten Gewinn aus jeder Strategie bezeichnet[1].

Die bisher aufgezeigten Entscheidungskriterien unter Unsicherheit zeichnen sich dadurch aus, daß auf eine Berücksichtigung von Wahrscheinlichkeiten vollkommen verzichtet wird. Mißt man nun allen möglichen n Resultaten einer Entscheidung das gleiche Gewicht zu, dann gelangt man zum LAPLACE-Kriterium:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{ij}}{n}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)^{2)},$$

was praktisch nichts anderes bedeutet als eine Maximierung der mathematischen Erwartung des Gewinnes für den Fall gleicher Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt möglicher Ergebnisse einer Entscheidung.

Es erhebt sich nun die Frage, welches der aufgezeigten Kriterien für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung am geeignetsten erscheint. Ein Arbeiten mit dem Erwartungswert des Gewinnes wäre offenbar dann völlig ausgeschlossen, wenn das Entscheidungs-

---

1) Vgl. K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, a.a.O., S. 13; R.L.ACKOFF, K.S.GUPTA, J.S.MINAS, Scientific Method Optimizing Applied Research Decisions, New York und London 1962, S. 51/52.

2) Vgl. K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, a.a.O., S. 13.

subjekt derart informationslos wäre, daß völlige Unsicherheit vorläge; in diesem Falle kämen trotz ihrer offenkundigen Schwächen (so wird etwa beim HURWICZ-Kriterium der Unternehmer nur sehr schwer seinen eigenen Optimismus-Koeffizienten angeben können) im wesentlichen nur die oben aufgezeigten Kriterien in Frage. Nun bilden aber Situationen, in denen über die möglichen Resultate einer Entscheidung überhaupt keine Informationen vorliegen oder eingeholt werden können, im praktischen Wirtschaftsleben eine Ausnahmeerscheinung. Bei bekannten Wahrscheinlichkeiten, handele es sich nun um objektive oder um subjektive Wahrscheinlichkeiten, besteht aber wegen der von uns getroffenen Annahme, daß die für die Unternehmung ungünstigen Ereignisse nicht derart ungünstig sein dürfen, daß sie den Ruin des Entscheidungssubjektes bedeuten, kein zwingender Grund dafür, die jeder möglichen Entscheidung zugeordneten Gewinne nicht mit ihren Wahrscheinlichkeiten zu gewichten und den sich ergebenden Erwartungswert des Gewinnes zu maximieren. Diese zunächst mehr praktische Argumentation findet zusätzlich ihre theoretische Untermauerung in der auf die Arbeiten von J.v.NEUMANN und O. MORGENSTERN[1] zurückgehenden modernen Nutzentheorie[2].

---

1) Vgl. hierzu vor allem J.v.NEUMANN und O.MORGENSTERN, Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, a.a.O., insbes. S. 15 ff.

2) Eine knappe, aber hinreichende Charakterisierung geben vor allem G.HADLEY und T.M.WHITIN, Analysis of Inventory Systems, Englewood Cliffs, N.J. 1963, S. 24: "If it is possible for an individual to express consistent preferences between various situations whose outcomes must be described probabilistically, then there exists a function having a numerical value associated with every possible outcome such that if he selects among the alternatives in such a way that the expected value of this function is maximized, then he will be acting in a way that is truly representative of his preferences."

die zuweilen als alleinige Begründung für die Verwendung von Erwartungswerten als Entscheidungskriterium auch bei einmaligen Entscheidungen angesehen wird[1]. Indessen würde ein solcher Schluß, die Maximierung des Erwartungswertes des Gewinnes als allein gültiges Entscheidungskriterium in Risikosituationen anzusehen, zu weit führen; denn es sind durchaus Fälle denkbar, wo ein solches Vorgehen nicht zu sinnvollen Ergebnissen führt. Nichtsdestoweniger bleibt aber unter der Voraussetzung, daß es zumindest möglich ist, subjektive Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln, die Maximierung des Erwartungswertes des Gewinnes eine plausible Zielsetzung der Unternehmung, die zumindest als Arbeitshypothese für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung durchaus geeignet erscheint.

2. Die Aufgabe unternehmerischer Planung

Damit die Unternehmung die von ihr angestrebte Zielsetzung realisieren kann, muß geplant werden. Unternehmerische Planung beinhaltet dabei den gedanklichen Prozeß, in dem "das von der Geschäfts- und Betriebsleitung Gewollte in die rationalen Formen möglichen betrieblichen Vollzuges umzugießen"[2] ist. Hierbei sind die Beziehungen zwischen den Tätigkeitsbereichen einer Unternehmung zu beachten. Deshalb hat sich die Planung grundsätzlich auf den Gesamtbereich einer Unternehmung zu erstrecken, wobei eine vollkommene Abstimmung der einzelnen Teilbereiche aufeinander das anzustrebende Ziel ist. Innerhalb der

---

1) So etwa G.HADLEY und T.M.WHITIN, a.a.O., S. 25: "It is in this way that we justify the use of the expected profit even in situations where the given set of conditions can never be expected to be encountered again".

2) E.GUTENBERG, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 1. Band: Die Produktion, 5. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960, S. 114.

einzelnen Funktionsbereiche sind wiederum die Zusammenhänge zwischen den Handlungsparametern und Variablen, über die entschieden werden soll, zu berücksichtigen. Die Aufgabe der unternehmerischen Planung besteht nun darin, die Handlungsparameter und Variablen aller für die Entscheidung wesentlichen Zusammenhänge in der Weise zu kombinieren, daß die Kombination einen im Sinne der unternehmerischen Zielsetzung optimalen Plan darstellt.

II. Produktionsprogrammplanung im Mehrproduktbetrieb

1. Die Aufgabe der Produktionsprogrammplanung

Aufgabe der Produktionsprogrammplanung ist die Festlegung der Produktion einer Unternehmung "nach Art und Menge für einen bestimmten Zeitraum"[1]. Das Produktionsprogramm einer Unternehmung gibt also an, welche Erzeugnisarten und welche Erzeugnismengen innerhalb einer Planungsperiode produziert werden sollen. Hierbei darf der Begriff der Produktion nicht zu eng gefaßt werden, etwa im Sinne einer rein technisch-fabrikatorischen Herstellung; denn das Produktionsprogramm einer Unternehmung umfaßt sowohl das Fabrikations- als auch das Verkaufsprogramm[2].

Produktionstechnisch ist hierbei zunächst die Frage interessant, ob es sich um eine Unternehmung handelt, die nur ein einziges Gut herstellt und auf dem Markt anbietet (Einproduktunternehmung) oder um eine Unternehmung, die mehrere Produktarten herstellt

---

1) E.GUTENBERG, Die Produktion, a.a.O., S. 124.

2) G.ABROMEIT, Erzeugnisplanung und Produktionsprogramm, Wiesbaden 1955, S. 34: "Eine unzulässige Ausweitung des Produktionsbegriffes kann hierin nicht erblickt werden, denn auch die Dienstleistungen der Handels-, Bank- und Versicherungsbetriebe sind als Produktion anzusehen, weil sie wertsteigernden und mithin produktiven Effekt besitzen".

und verkauft (Mehrproduktunternehmung). Einproduktbetriebe kommen in der wirtschaftlichen Praxis zwar vor, sind aber als selten anzusehen. Wir wollen uns aus diesem Grunde nicht weiter damit beschäftigen und uns ausschließlich der Mehrproduktunternehmung zuwenden.

2. Der Mehrproduktbetrieb

Im Mehrproduktbetrieb sind produktionstechnisch folgende Fälle zu unterscheiden:[1)]

(a) Parallelproduktion
Bei Parallelproduktion sind die Produkte fertigungstechnisch völlig unabhängig voneinander. Dieser Fall ist produktionstechnisch mit dem der Einproduktunternehmung identisch.

(b) Kuppelproduktion
Kuppelproduktion liegt dann vor, wenn eine Erzeugnisart nicht hergestellt werden kann, ohne daß gleichzeitig ein oder mehrere andere Erzeugnisse anfallen, wie dies etwa in der chemischen oder in der eisenschaffenden Industrie oft der Fall ist. Die Kuppelproduktion ist nur als ein Spezialfall der Parallelproduktion anzusehen und soll hier nicht weiter betrachtet werden.

(c) Gemeinsame Produktion
Zwar sind auch hierbei die Produktionsverfahren für die einzelnen Erzeugnisse im technischen Sinne unabhängig, jedoch werden hierbei ein oder mehrere Produktionsfaktoren gemeinsam genutzt. Werden diese gemeinsam genutzten Faktoren nicht vollständig in Anspruch genommen, dann kann

---

1) Vgl. hierzu vor allem: E.SCHNEIDER, Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil, 6. verb. Auflage, Tübingen 1960, S. 109 ff.; H.v.STACKELBERG, Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre, 2. Aufl., Tübingen und Zürich 1951, S. 77 ff.

dieser Fall behandelt werden wie die Parallelproduktion[1]. Werden jedoch einige oder alle Produktionsfaktoren vollständig ausgenutzt, so ist die Herstellung einer größeren Menge des einen Erzeugnisses nur möglich bei einer gleichzeitigen Verminderung der Menge eines oder mehrerer anderer Erzeugnisse; die Produktion der Güter ist also in diesem Sinne alternativ, man spricht demgemäß von Alternativproduktion[2].

Hierbei tauchen die in der wirtschaftlichen Praxis so häufig anzutreffenden Zuordnungsprobleme auf; denn die begrenzt vorhandenen Produktionsfaktoren können den Erzeugnissen in ganz unterschiedlicher Weise zugeteilt werden. Im folgenden wollen wir diese der produktionstechnischen Realität in Industriebetrieben am nächsten kommende Alternativproduktion unserer Untersuchung zugrundelegen.

3. Der globale Charakter der Produktionsprogrammplanung

Da das Produktionsprogramm einer Unternehmung sowohl das Fabrikations- als auch das Verkaufsprogramm umfaßt, taucht zunächst das Problem auf, ob sich das Produktionsprogramm primär den Bedingungen des Absatzmarktes oder aber in erster Linie den konkreten

---

1) Dieser Fall wird bei H.v.STACKELBERG, (Grundlagen, a.a.O., S. 80) bei seinem Kriterium für das gewinnmaximale Produktionsprogramm: "Von jedem Produkt wird die Ausbringung produziert und abgesetzt, deren Grenzkosten dem Preise dieses Produktes gleich sind ..." unterstellt. STACKELBERG's Theorie der Mehrproduktunternehmung ist also genau genommen eine Theorie der Einproduktunternehmung.

2) Vgl. W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 51; E.SCHNEIDER, Einführung, II. Teil, a.a.O., S. 112; H.v.STACKELBERG, Grundlagen, a.a.O., S. 79.

betrieblichen Leistungsvoraussetzungen anzupassen hat. In einer freien Verkehrswirtschaft wird man geneigt sein, den Marktbedingungen bei der Aufstellung des Produktionsprogrammes den Vorrang vor den fertigungstechnischen Bedingungen zu geben. Denn mit dem Produktionsprogramm trifft die Unternehmung aus der Gesamtheit der sich aus dem Bedarf der Verbraucher zusammensetzenden Marktwünsche eine Auswahl und grenzt gleichzeitig denjenigen Bereich des Marktes ab, auf dem sie sich betätigen will. Hierbei wird die Unternehmung für jedes ihrer Erzeugnisse eine ganz bestimmte Absatzsituation vorfinden, die sich aus der Art und Menge des Bedarfs, den Gepflogenheiten der Abnehmer und dem Verhalten etwaiger Konkurrenten ergibt, und die demnach zu berücksichtigen ist.

Wenngleich es aus diesen Gesichtspunkten heraus wünschenswert erscheint, das Produktionsprogramm möglichst weitgehend den Bedingungen des Marktes anzupassen, so würde ein Plan, der sich ausschließlich an den Bedürfnissen des Marktes orientiert, ohne sichere Grundlage bleiben, wenn nicht gleichzeitig die konkreten fertigungswirtschaftlichen Bedingungen der Unternehmung berücksichtigt würden. Denn genauso wie das Produktionsprogramm über die Festlegung des Angebotes am Markt entscheidenden Einfluß auf die Gestaltung der Erlöse nimmt, so wird gleichzeitig damit über die Höhe der Produktionskosten, und damit über die Höhe des Gewinnes als Differenz zwischen diesen beiden Größen entschieden. Zu beachten sind hier insbesondere die durch die produktive Ausstattung des Betriebes gesetzten Grenzen und die mengenmäßige Beziehung zwischen dem Einsatz an Produktionsfaktoren und dem mengenmäßigen Ergebnis des Faktoreinsatzes, d.h. die Art der Produktionsfunktion, die ja die Grundlage der Kostenfunktion bildet.

Die Produktions- und Absatzbedingungen stellen zwar im allgemeinen die wesentlichsten Orientierungspunkte bei der Planung des Produktionsprogrammes dar; hinzutreten muß aber unbedingt auch eine Berücksichtigung beschaffungs- und finanzwirtschaftlicher Gesichtspunkte, wenn das Produktionsprogramm optimal geplant sein soll. Es ist unmittelbar einleuchtend, daß die Beschaffung von Betriebsmitteln, Werkstoffen und Arbeitskräften ernst zunehmende Schwierigkeiten aufwerfen kann, die im Extremfall die Produktionsprogrammplanung zwingen kann, sich ausschließlich am Beschaffungsplan zu orientieren. Auch wenn man diesen Fall ausschließt, so bleiben doch immer die Marktposition, in der sich Anbieter und Nachfrager von Produktionsfaktoren befinden, Rabatte, Lieferbedingungen und weitere Konditionen Gesichtspunkte, die bei der Aufstellung des Produktionsprogrammes von wesentlicher Bedeutung sein können.

Weiterhin ist es selbstverständlich, daß das Produktionsprogramm auch finanzmäßig durchführbar sein muß, es darf also nur ein solches Produktionsprogramm gewählt werden, das die der Unternehmung offenstehenden Kreditmöglichkeiten beachtet und die Liquidität der Unternehmung nicht gefährdet. Insbesondere dem Problem der Planung des Produktionsprogrammes unter dem Gesichtspunkt der Liquiditätssicherung ist bisher in der betriebswirtschaftlichen Literatur noch nicht die Beachtung geschenkt worden, die ihm eigentlich zukommt[1].

Schon diese kurzen Andeutungen haben gezeigt, daß gerade bei der Planung des Produktionsprogrammes die Beziehungen zu den einzelnen Funktionsbereichen

---

1) Vgl. E.SCHNEIDER, Bemerkungen zu einigen neueren Entwicklungen in der Theorie der Unternehmung, a.a.O., S. 95.
Eine Ausnahme stellt in gewisser Weise H.ALBACH (Investition und Liquidität, Wiesbaden 1962) dar.

der Unternehmung besonders eng sind, und daß das Produktionsprogramm, wenn es einen im Sinne der unternehmerischen Zielsetzung optimalen Plan darstellen soll, "das Ergebnis von zugleich absatzpolitischen, produktionstechnischen, finanziellen ... und beschaffungswirtschaftlichen ... Daten, Überlegungen und Maßnahmen"[1] darstellen muß.

B. Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage als Aufgabe marktorientierter Unternehmungen

I. Marktorientierte Unternehmungen

Unter marktorientierten Unternehmungen versteht man solche Unternehmungen, die für den Markt produzieren, d.h. bei denen die Planung des Produktionsprogrammes zeitlich der vom Markt ausgehenden Nachfrage nach den von ihr angebotenen Erzeugnissen vorgelagert ist. Während bei den sogenannten auftragsorientierten Unternehmungen, bei denen erst dann mit der Produktion begonnen wird, wenn ein Auftrag erteilt worden ist, und somit bei dieser Art von Betrieben die Auftragsbestände das bestimmende Plandatum darstellen, muß bei marktorientierten Unternehmungen wegen der in aller Regel unvollständigen Kenntnis der zukünftigen Nachfrage der Produktionsprogrammplan weitgehend auf Schätzungen beruhen[2]. Weichen die geplanten Produktartenmengen dann von den effektiv bei der Unternehmung realisierten Nachfragemengen ab, dann können aus einer zu geringen bzw. die tatsächliche Nachfrage überschreitenden Produktion Kostengrößen resultieren, die es bei der Planung des Produktionsprogrammes zu berücksichtigen gilt, wenn

---

1) E.GUTENBERG, Anmerkungen zur Frage der Gestaltung industrieller Produktionsprogramme, in: ZfB (34) 1964, S. 66/67.

2) Vgl. auch E.GUTENBERG, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 1. Band: Die Produktion, 10. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York 1965, S. 164.

das Programm einen im Sinne der angestrebten Zielsetzung optimalen Plan darstellen soll.

Marktorientierte Mehrproduktunternehmungen haben also nicht nur darüber zu entscheiden, welche Produktarten und wieviele Produktartenmengen hergestellt werden sollen, was eine Lösung des Zuordnungsproblems der beschränkt vorhandenen Produktionsfaktoren erfordert, sondern darüber hinaus noch dem Phänomen des Risikos, d.h. in diesem Falle der stochastischen Nachfrage, Rechnung zu tragen[1]; ein Problem, dessen praktische Lösung nur mit Hilfe der im Rahmen der mathematischen Programmierung entwickelten Verfahren möglich ist. Bevor hierauf aber näher

---

1) Gerade in diesem Zusammenhang erhält das für marktorientierte Betriebe typische Problem eines Ausgleichs zwischen fertigungstechnischen und absatzpolitischen Gesichtspunkten bei der Produktionsprogrammgestaltung zusätzliche interessante Aspekte. Denn in dem Konflikt zwischen den auf eine Minimierung der Produktionskosten durch Reduzierung der Anzahl der Erzeugnisarten im Programm abzielenden Überlegungen und Gesichtspunkten, die für ein breites und differenziertes Produktionsprogramm sprechen, erhalten die den fertigungstechnischen entgegengesetzten Überlegungen gerade aus der Sicht der Ungewißheit über die zukünftige Nachfrage zusätzliche für eine Programmausweitung sprechende Argumente. So kann etwa bei einem sehr breiten und differenzierten Produktionsprogramm eher mit einem Ausgleich der positiven und negativen Abweichungen vom mathematischen Erwartungswert gerechnet werden als bei einem nur wenige Erzeugnisarten umfassenden Programm. Auch die Diversifikation (oder Diversifizierung), d.h. die gezielte Ausweitung des Produktionsprogrammes einer Unternehmung, hat neben der Erschließung neuer Absatzmärkte vor allem den Risikoausgleich einer Unternehmung zum Ziel. Vgl. hierzu vor allem G.BARTELS, Diversifizierung -Die gezielte Ausweitung des Leistungsprogrammes der Unternehmung- Stuttgart 1966, insbesondere S. 57 ff.

eingegangen wird, soll zuvor kurz präzisiert werden, was im folgenden unter stochastischer Nachfrage verstanden wird, und welche Möglichkeiten bestehen, über die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Eintritt möglicher Nachfragemengen eine Vorhersage zu treffen.

II. Der Begriff der stochastischen Nachfrage

Unter Nachfrage sollen die bei der Unternehmung wirksam werdenden alternativ möglichen Nachfragemengen pro Zeiteinheit verstanden werden. Von stochastischer Nachfrage soll gesprochen werden, wenn diese Nachfragemengen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegen. Unter der Nachfragefunktion einer Unternehmung versteht man im deterministischen Falle eine eindeutige Abhängigkeit der Nachfrage von eigenen marktstrategischen Variablen und dem Verhalten anderer Unternehmungen dergestalt, daß einer bestimmten Entscheidung ein und nur ein Resultat zugeordnet werden kann. Im stochastischen Fall hängen die Nachfragemengen zusätzlich noch von einem oder mehreren Parametern ab, die von der Unternehmung nur statistisch kontrolliert werden können[1].

Nachfrage kann grundsätzlich vom Markt oder in mehrstufigen Fertigungsprozessen von nachgelagerten Fertigungsstufen ausgeübt werden; der Fall,daß die Nachfragemengen produktionstechnisch nachgelagerter Fertigungsstufen zufallsabhängig sind, soll aber in der vorliegenden Untersuchung nicht betrachtet werden.

III. Die Vorhersage der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Eintritt möglicher Nachfragemengen als Voraussetzung einer Planung des Produktionsprogrammes bei stochastischer Nachfrage

Für die Unternehmung, die unter den aufgezeigten Bedingungen ihr Produktionsprogramm planen will,

---

1) Vgl. auch W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 3.

entsteht nun das entscheidende Problem, welche Möglichkeiten und Methoden vorhanden sind, um über die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Eintritt der möglichen Nachfragemengen eine Vorhersage zu treffen. Grundsätzlich können hierbei folgende Vorhersagemethoden unterschieden werden:[1)]

1. Vorhersage bei gleichbleibenden Verhältnissen

Unter der Annahme gleichbleibender Verhältnisse ist die Wahrscheinlichkeit des Eintrittes einer bestimmten Nachfragemenge vom Zeitpunkt des Eintritts unabhängig. Die Wahrscheinlichkeit des zukünftigen Eintritts eines Ereignisses kann dann durch die relative Häufigkeit der einzelnen Erscheinungsformen (z.B. Nachfragemengen) in der Vergangenheit ausgedrückt werden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Ereignisses kann hierbei niemals genau angegeben, sondern immer nur geschätzt werden. Die Genauigkeit der Schätzung hängt dabei ab vom Stichprobenumfang und dem Grad der Genauigkeit, mit der die Schätzung durchgeführt werden soll.

2. Vorhersage mittels Zeitreihenanalyse

Nimmt man das Vorliegen eines Trends an, dann kann die Zeitreihe in eine Trendkomponente und in eine Zufallskomponente mit dem Erwartungswert Null zerlegt werden. Unter der Annahme stabiler Zyklen kann neben einer Trendkomponente und einer Zufallskomponente noch eine zyklische Komponente berücksichtigt werden, wobei grundsätzlich drei Ansätze unterschieden werden können; ein näheres Eingehen auf diese bekannten statistischen Instrumente erübrigt sich aber[2)].

---

1) Vgl. I.D.J.BROSS, Design for Decision, New York 1953, S. 33 ff.

2) Vgl. hierzu etwa D.B.HERTZ und K.H.SCHAFFIR, A Forecasting Method for Management of Seasonal Style-Goods Inventories, in: Op. Res. (8) 1960, S. 45 ff.

Die bisher genannten Methoden gehen davon aus, daß die zur Verfügung stehenden Daten ausreichen, um eine Aussage mit einer vernachlässigbar kleinen Toleranz zu treffen. Sollen die zusätzlichen Informationen, die im Ablauf von Perioden gewonnen werden, bei der nächsten Vorhersage berücksichtigt werden, dann muß die gesamte Rechenarbeit noch einmal geleistet werden, was für die praktische Anwendung recht umständlich ist. Ein Verfahren, das die Extrapolation einer Zeitreihe mit geringerem Aufwand an Rechenarbeit und Datenmaterial erlaubt, ist die exponentielle Glättung, mit deren Hilfe ein Mittelwert berechnet und für die Vorhersage der nächster Periode verwendet wird. Dieser Mittelwert ist die Summe aller vorhergehenden Werte, die ihrem Alter entsprechend gewichtet werden, und zwar in der Weise, daß ihnen um so weniger Gewicht beigemessen wird, je länger sie zurückliegen, wobei das Gewicht exponentiell mit der zeitlichen Entfernung von der gegenwärtigen Periode abnimmt. Auch hierbei kann zwischen einer exponentiellen Glättung erster und zweiter Ordnung unterschieden werden[1]. Wichtig ist vor allem, daß hiermit nur der erwartete Mittelwert bestimmt, aber noch keine Aussage über die Streuung gemacht wird; jedoch kann gezeigt werden, daß sich die Streuung der Merkmalswerte aus der Streuung der Mittelwerte berechnen läßt[2]. Wenn man nur mit den beiden ersten Momenten rechnet, approximiert man die Verteilung der einzelnen Werte um den Mittelwert durch eine Normalverteilung. Wegen der Symmetrie der Normalverteilung steht aber die mittlere absolute Abweichung in einem festen Verhältnis zur Streuung, man kann also bei einer Normalverteilung aus

1) Vgl. vor allem R.G.BROWN, Statistical Forecasting for Inventory Control, New York-Toronto-London 1959, insbes. S. 65 ff.

2) Vgl. ebenda, S. 57 und 91.

der mittleren absoluten Abweichung die Standardabweichung und somit auch die Streuung errechnen[1].

3. Assoziative Vorhersage

Unter assoziativer Vorhersage versteht man eine Vorhersage, bei der von einem Ereignis auf die zukünftige Entwicklung eines anderen geschlossen wird. Voraussetzung ist meist ein kausaler Zusammenhang, mindestens aber eine statistische Abhängigkeit zwischen den beiden betrachteten Ereignissen. Zu dieser Art der Vorhersage gehören insbesondere die Rückschlüsse, die im Rahmen der Absatzmarktforschung auf die zukünftige Nachfrage gezogen werden[2].

4. Subjektive Vorhersage

Als subjektiv bezeichnet man eine Vorhersage dann, wenn für die Eintrittsform eines Ereignisses keine objektiven Anhaltspunkte vorhanden sind. Um aber eine sinnvolle und seiner Zielsetzung konforme Vorhersage treffen zu können, muß das Entscheidungssubjekt die möglichen Formen des Eintretens eines Ereignisses kennen, was dadurch geschehen kann, daß die vorliegende Ungewißheit durch eine subjektive Wahrscheinlichkeit gemessen wird. Hierbei kann die subjektive Wahrscheinlichkeit definiert werden als der Grad des Vertrauens, "mit dem eine bestimmte Person oder ein Personenkreis ein gewisses Ereignis erwartet"[3]. Dieser Vorhersageform kommt gerade für die Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage

---

1) Vgl. L.SCHMETTERER, Einführung in die mathematische Statistik, Wiesbaden 1956, S. 69.

2) Vgl. K.MELLEROWICZ, Planung und Plankostenrechnung, Bd. I: Betriebliche Planung, Freiburg i.Br. 1961, S. 84; I.D.J.BROSS, a.a.O., S. 36.

3) W.KRELLE, Unsicherheit und Risiko in der Preisbildung, z.f.d.ges.Staatsw. (113) 1957, S. 636.

besondere Bedeutung zu, weil hierbei oftmals nicht genügend Daten aus der Vergangenheit vorliegen oder nicht damit gerechnet werden kann, daß die zu treffende Entscheidung sich auf eine so lange Periode bezieht, daß in ihr alle Werte der Daten mit den relativen Häufigkeiten, die ihrer Wahrscheinlichkeit nahekommen, zu finden sind, daß also in gewissem Sinne Einmaligkeit vorliegt[1].

Hierbei müssen wir uns natürlich darüber klar sein, daß subjektive Wahrscheinlichkeiten etwas anderes darstellen als empirische (oder 'objektive') Wahrscheinlichkeiten, weil empirische Wahrscheinlichkeiten bei einmaligen und nicht wiederholbaren Vorgängen, wie dies etwa die Festlegung eines bestimmten Produktionsprogrammes darstellt, ex definitione nicht bestimmbar sind. Dennoch ist ein Unternehmer im allgemeinen sehr wohl gezwungen und in der Lage, auch in derartigen Situationen Entscheidungen zu treffen, wie dies die Wirtschaftspraxis täglich beweist. Denn auch hier führen sorgfältige Überlegungen unter Abwägung der Einflüsse aller für eine ökonomische Entscheidung relevanten Faktoren zu dem Ergebnis, daß etwa der Eintritt eines ganz bestimmten Ereignisses praktisch ausgeschlossen werden kann, während das Eintreffen eines anderen Ereignisses für durchaus möglich oder für sehr wahrscheinlich gehalten wird, was nichts anderes bedeutet, als daß der Unternehmer die Auswirkungen einer Entscheidung in seiner Vorstellung quantifiziert, also etwa dem Eintritt eines bestimmten Ereignisses (z.B. einer bestimmten Nachfragemenge) im ersteren Falle die subjektive

1) Vgl. hierzu vor allem W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 89 und S. 611-613; G.KADE, Die Grundannahmen der Preistheorie, a.a.O., S. 162; A.ANGERMANN, Entscheidungsmodelle, a.a.O., S. 22 ff.; W.KRELLE, Unsicherheit und Risiko in der Preisbildung, a.a.O., S. 636 ff.

Wahrscheinlichkeit von 0,01 bis 0,10 zuordnet, oder im Falle eines durchaus möglichen Ereignisses eine solche von 0,4 bis 0,6 oder, wenn er den Eintritt etwa einer bestimmten Nachfragemenge für sehr wahrscheinlich hält, eine subjektive Wahrscheinlichkeit von größer als 0,8 zuordnet.

Hier taucht selbstverständlich die Frage auf, wie ein Entscheidungssubjekt, das eine Entscheidung nur einmal treffen kann, zu einer solchen subjektiven Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines bestimmten Ereignisses gelangen kann. Da im Gegensatz zu den Naturwissenschaften, wie etwa in der Physik oder Chemie, Wiederholungen eines Experimentes unter gleichen Bedingungen bei ökonomischen Sachverhalten nahezu ausgeschlossen sind, muß - wenn man einmal von reiner Intuition als einem nicht rational faßbaren Vorgang absieht - in solchen Fällen das Entscheidungssubjekt offenbar mittels eines Gedankenexperimentes eine Vorhersage über den Eintritt von Ereignissen fällen, wobei die Daten, auf denen dieses Experiment aufbaut, weitgehend den Charakter von Hypothesen haben[1], wobei aber, insbesondere im Wege von Analogieschlüssen, alle zur Rechtfertigung einer Hypothese geeigneten Daten herangezogen werden sollten. Überwiegend ist man heute der Ansicht, daß die Information von wirtschaftlichen Entscheidungssubjekten durch subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilungen wiedergegeben werden kann[2].

Eine hiervon abweichende Meinung vertritt vor allem G.L.S.SHACKLE[3], der subjektive Wahrscheinlichkeiten

---

1) Vgl. A.ANGERMANN, Entscheidungsmodelle, a.a.O., S. 23.

2) Vgl. G.KADE, Die Grundannahmen der Preistheorie, a.a.O., S. 162 und die dortige Literatur.

3) G.L.S.SHACKLE, Uncertainty in Economics and other Reflections, 2. Aufl., Cambridge 1955.

als Maß für den Grad der Ungewißheit ablehnt und sie durch den Begriff der 'potentiellen Überraschung' (potential surprise) zu ersetzen versucht. SHACKLE bestreitet, daß es überhaupt möglich sei, subjektive Wahrscheinlichkeiten mit einem numerischen Wert zu versehen, und hält auch die Addition subjektiver Wahrscheinlichkeiten für wenig sinnvoll. Seine Argumentation läuft letztlich darauf hinaus, daß ja nur eines der möglichen Ereignisse eintreten könne; ist dieses Ereignis eingetreten, dann haben sich die anderen Überlegungen als überflüssig erwiesen. "Die verschiedenen in Betracht gezogenen Ereignisse sind also Rivalen, und es wäre unsinnig, sie zu gleicher Zeit in Betracht zu ziehen und ihre Wirkung auf die eigene Entschlußkraft zu addieren"[1].

Dieses Argument ist aber nicht zwingend; denn hierbei wird die Situation vor dem Eintritt eines Ereignisses mit der Situation nach dem Eintritt des Ereignisses verwechselt. Vor dem Eintritt des Ereignisses müssen vielmehr alle Möglichkeiten, und zwar auch die unwahrscheinlichsten, in die Planungsüberlegungen einbezogen werden. "Es wäre offenbar eine üble Verkennung der Lage, wenn eine der Möglichkeiten aus der vorhandenen Verteilung ausgewählt und sie allein zur Grundlage des Entschlusses erhoben würde"[2]. Hierbei ist es zunächst vollkommen unerheblich, daß letztlich nur eines der möglichen Ereignisse realisiert wird, weil jedes Ereignis, auch das mit der kleinsten Wahrscheinlichkeit, eintreten kann, und man somit auch mit allen Möglichkeiten rechnen muß. Nach dem Eintritt eines bestimmten Ereignisses inter-

---

1) W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 614. Eine gute Charakterisierung der SHACKLE'schen Konzeption findet sich auch bei W.WITTMANN, a.a.O., S. 62 ff.

2) W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 614.

essiert natürlich nur noch dieses eine, aber dann liegt ja auch keine Ungewißheit mehr vor[1].

SHACKLE's Argumentation kann also nicht überzeugen. Da sich zudem auch die SHACKLE'sche Konzeption auf subjektive Wahrscheinlichkeiten zurückführen läßt; denn der Begriff der 'potentiellen Überraschung' ist letztlich nichts anderes als ein anderer Ausdruck für die reziproken Werte von subjektiven Wahrscheinlichkeiten[2], stehen einer Verwendung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung keine schwerwiegenden Argumente mehr entgegen. Auf die methodologischen Unterschiede bei der Bestimmung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten (vor allem durch BAYES und bei CARNAP), die vor allem formaler Natur sind, braucht dabei nicht näher eingegangen zu werden[3].

Nachdem nun dargelegt worden ist, worin die Aufgabe der Produktionsprogrammplanung liegt, was unter stochastischer Nachfrage zu verstehen ist und welche Möglichkeiten und Methoden der Vorhersage der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Eintritt möglicher Nachfragemengen vorhanden sind, kann zur Bildung von Entscheidungsmodellen zur Bestimmung des im Hinblick auf die genannte Zielsetzung optimalen Produktionsprogrammes im Mehrproduktbetrieb, wenn die Nachfragemengen Zufallsvariablen sind, übergegangen werden. Zuvor soll jedoch das zur Lösung des Problems zur Verfügung stehende Instrumentarium, die mathematische Programmierung, kurz aufgezeigt werden.

---

1) Vgl. W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 614.

2) Vgl. hierzu W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 615 ff.

3) Vgl. hierzu etwa G.TINTNER, Eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie von CARNAP auf ein Problem der Unternehmensforschung, in: Ufo (4) 1960, S. 165 ff.

II. Teil: Mathematische Programmierung

A. Definition der mathematischen Programmierung und Einteilung der mathematischen Programmierungsmethoden

I. Definition

Unter mathematischer Programmierung verstehen wir die Extremierung (Maximierung oder Minimierung) einer Funktion mehrerer Variablen unter Nebenbedingungen, wobei für die Variablen Vorzeichenbeschränkungen bestehen.

II. Einteilung

In der Literatur[1] unterscheidet man üblicherweise drei Teilgebiete der mathematischen Programmierung, und zwar lineare, nichtlineare und dynamische Programmierung. Diese Einteilung ist aber nicht unbedingt zwingend, schon deshalb, weil die dynamische Programmierung weniger eine Rechenmethode als ein mathematisches Prinzip darstellt und sich sowohl auf lineare als auch auf nichtlineare Programmierungsaufgaben anwenden läßt. Besser ist eine Einteilung in Programmierungsmethoden, bei denen eine simultane Festlegung aller Komponenten des Zielvektors angestrebt wird (simultane Programmierung), worunter insbesondere alle aus den Gebieten der linearen und der quadratischen Programmierung bekannten Verfahren fallen, und eine Einteilung in solche Optimierungsverfahren, die sich des Prinzips der gedanklichen Zerlegung einer Menge von an sich simultanen Entscheidungen in eine Menge von stufenweise aufeinanderfol-

---

1) Vgl. etwa S.VAJDA, Mathematical Programming, Reading, Mass. und London 1961.

genden bedienen[1] (dynamische Programmierung). Auch hierbei muß man sich darüber klar sein, daß der von R.BELLMAN geprägte Begriff der dynamischen Programmierung unter Umständen irreführend sein kann, insbesondere was die Bezeichnung 'dynamisch' angeht. Ein dynamisches Programmierungsproblem ist nämlich nur dann dynamisch im Sinne der ökonomischen Theorie, wenn die Variablen des Problems eindeutig einer Reihe von Planungsperioden eines bestimmten Planungsabschnittes zugeordnet sind, was keineswegs der Fall zu sein braucht; denn dieses Verfahren kann auch auf Probleme angewandt werden, bei denen die Zeit überhaupt keine Rolle spielt; der Begriff 'dynamisch' ist hier also weitergehend als der in der ökonomischen Theorie verwendete[2]. Aus diesem Grunde wäre es zweifelsohne treffender, von "stufenweiser Programmierung" zu sprechen; ob sich dieser Begriff jedoch gegenüber dem bereits sehr verbreiteten Ausdruck 'dynamische Programmierung' durchsetzen wird, ist fraglich.

B. Simultane Programmierung

I. Lineare Programmierung

1. Allgemeiner Ansatz

Bei der mathematischen Formulierung eines linearen Programmierungsproblems in allgemeiner Form beschränken wir uns auf die Maximumaufgabe:

---

1) Vgl. D.ZSCHOCKE, Die Behandlung von Entscheidungsproblemen mit Hilfe des Dynamischen Programmierens, in: Ufo (8) 1964, S. 104/105.

2) Zu den Begriffen 'Statik' und 'Dynamik' vgl. etwa E.SCHNEIDER, Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil, 6. verb. Aufl., Tübingen 1960, S. 262 ff.

Die Linearform

(1) $\left[f(x) = c'x \right] \stackrel{!}{=} \text{Max.}$

unter den linearen Nebenbedingungen

(2) $Ax \leq b$

und

(3) $x \geq o,$

wobei c und x n-dimensionale Spaltenvektoren bezeichnen[1], A ist eine $(m \cdot n)$-Matrix, b ein m-dimensionaler Spaltenvektor und o ein n-dimensionaler Nullvektor.

Zur numerischen Lösung einer solchen linearen Programmierungsaufgabe steht eine ganze Reihe von Verfahren zur Verfügung, auf praktische Probleme wird vor allem die Simplex-Methode in ihren verschiedenen Formen angewandt. Hierüber besteht bereits eine umfangreiche Literatur[2], weshalb auf eine nähere Darstellung dieses Rechenverfahrens verzichtet werden kann.

2. Ganzzahlige lineare Programme

Wird für das oben beschriebene Problem (1), (2) und (3) zusätzlich noch für alle Komponenten von x Ganzzahligkeit gefordert, also

(3)' x_j ganzzahlig! $(j = 1,2,\ldots, n)$,

so besteht grundsätzlich die Möglichkeit, diese lineare Programmierungsaufgabe mit der Simplex-Methode zu lösen und die Ergebnisse auf ganze Zahlen abzu-

1) Streichung bedeutet Transponierung.

2) Vgl. hierzu etwa G.B.DANTZIG, Linear Programming and Extensions, Princeton, N.J. 1963; A.CHARNES, W.W.COOPER, A.HENDERSON, An Introduction to Linear Programming, New York 1953; S.VAJDA, Readings in Linear Programming, London 1958; D.GALE, The Theory of Linear Economic Models, New York-Toronto-London 1960; S.GASS, Linear Programming, New York-Toronto-London 1958; M.SIMONNARD, Programmation Linéaire, Paris 1962; H.C.JOKSCH, Lineares Programmieren, Tübingen 1962; G.HADLEY, Linear Programming, Reading, Mass. und London 1962.

runden. Ist dieser Weg nicht gangbar, sind andere Lösungsverfahren erforderlich. Zur Verfügung stehen insbesondere die Verfahren von H.M.MARKOWITZ und A.S.MANNE[1], A.H.LAND und A.G.DOIG[2], sowie das Verfahren von R.E.GOMORY[3]. Die beiden ersteren sind rechnerisch recht umständlich[4]; zur Lösung praktischer Probleme kommt im wesentlichen das GOMORY-Verfahren in Frage. Dieses Verfahren ist zwar für eine nicht zu große Anzahl von Variablen relativ leicht zu handhaben, allerdings ist die Konvergenz nicht immer gut[5].

Wird nur für einige Variablen des Problems (1), (2), (3) Ganzzahligkeit gefordert, dann erfährt (3)' eine Modifikation, also etwa

(3)'' x_j ganzzahlig! $(j = 1,2,\ldots,g;\ g < n)$.

Auch derart strukturierte Probleme lassen sich in der Regel mit dem GOMORY-Verfahren lösen.

3. Stochastische lineare Programmierung

Sind im Problem (1), (2) und (3), das sich in verkürzter Form auch als

(4) $\underset{x \in X}{\text{Max!}} \left[f(x) = c'x \right],\ X = \{ x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \}$

schreiben läßt, einige oder alle Elemente von c', A und b Zufallsvariable, so liegt eine stochasti-

---

1) H.M.MARKOWITZ und A.S.MANNE, On the Solution of Discrete Programming Problems, in: Econometrica (25) 1957, S. 84 ff.

2) A.H.LAND und A.G.DOIG, An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems, in: Econometrica (28) 1960, S. 497 ff.

3) R.E.GOMORY und W.J.BAUMOL, Integer Programming and Pricing, in: Econometrica (28) 1960, S. 521 ff.

4) Eine kurze Darstellung des Verfahrens von MARKOWITZ und MANNE findet sich auch bei W.KRELLE, Ganzzahlige Programmierungen, Theorie und Anwendung in der Praxis, in: Ufo (2) 1958, S. 173.

5) Vgl. M.TERBBESI, Bemerkungen zum Verfahren von GOMORY zur Bestimmung ganzzahliger Lösungen von linearen Programmen, in: Ufo (5) 1961, S. 197 ff.; G.B.DANTZIG, On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables, in: Econometrica (28) 1960, S. 30 ff.

sche lineare Programmierungsaufgabe vor.

Zur Lösung dieses Problems stehen eine Reihe von Verfahren verschiedenen Typs und unterschiedlicher Effizienz zur Verfügung[1]. Üblich sind vor allem drei Arten des Vorgehens: Man ersetzt die Zufallselemente durch ihre Erwartungswerte (expected value solution), die Zufallselemente werden durch pessimistische Schätzungen ihrer Werte ersetzt (fat solution), oder man führt ein einstufiges stochastisches lineares Problem in ein zweistufiges über, wobei dann nach dem Treffen einer Entscheidung und anschließender Beobachtung des Zufallselementes Ungenauigkeiten in der Entscheidung auf der ersten Stufe ausgeglichen werden können (slack solution)[2].

II. Nichtlineare Programmierung

1. Vorbemerkung

Für den allgemeinen Fall der Extremierung einer nichtlinearen Zielfunktion unter nichtlinearen Nebenbedingungen, insbesondere wenn letztere sehr zahlreich sind, liegen noch keine geschlossenen Lösungsmethoden vor. Verfahren von praktischer Relevanz existieren fast ausschließlich für den speziellen Fall einer quadratischen Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen (quadratische Programmierung). Wir wollen uns deshalb auf diesen wichtigen Spezialfall der nichtlinearen Programmierung beschränken.

---

1) Vgl. etwa G.TINTNER, A Note on Stochastic Linear Programming, in: Econometrica (28) 1960, S. 490 ff.; G.B.DANTZIG, Linear Programming under Uncertainty, in: Man.Sci. (1) 1955, S. 197 ff.; S.KATAOKA, A Stochastic Programming Model, in: Econometrica (31) 1963, S. 181 ff.; A.MADANSKY, Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems, in: Man.Sci. (6) 1960, S. 197 ff.

2) Vgl. A.MADANSKY, Methods of Solution of Linear Programs under Uncertainty, in: Op.Res. (10) 1962, S. 463/464.

2. Mathematische Formulierung der quadratischen Programmierung

Wir betrachten die Grundform einer quadratischen Programmierungsaufgabe, d.h. den Fall, wo der Extremand sich zusammensetzt aus einer Linearform und einer quadratischen Form, und formulieren das Problem wiederum als Maximumaufgabe:

(5) $\left[f(x) = c'x - x'Dx \right] \stackrel{!}{=} \text{Max.}$

unter Berücksichtigung der linearen Nebenbedingungen

(6) $Ax \leq b$

und

(7) $x \geq 0.$

Hierin sind wiederum c und x Vektoren mit n Komponenten, A eine (m·n)-Matrix, D eine symmetrische (n·n)-Matrix und b der Begrenzungsvektor mit m Komponenten.

3. Hinweise auf Lösungsverfahren

Um sicherzustellen, daß bei einem quadratischen Programmierungsproblem auch tatsächlich das globale Optimum (in diesem Falle das Maximum) gefunden wird, muß außer der Bedingung, daß die quadratische Form symmetrisch ist (d.h. $d_{ij}=d_{ji}$) auch noch folgende Forderung gestellt werden:

Bei einer zu maximierenden Zielfunktion ist jedes relative Maximum nur dann ein globales Maximum, wenn die Zielfunktion konkav ist. Da in dem oben betrachteten Fall die Zielfunktion sich aus einer Linearform (die sowohl konkav als auch konvex ist) und einer quadratischen Form zusammensetzt, ist der Extremand notwendigerweise nur dann konkav, wenn die Quadratform konkav ist, was dann erfüllt ist, wenn D positiv semi-definit ist[1].

---

1) Vgl. etwa H.P.KÜNZI und W.KRELLE, Nichtlineare Programmierung, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S. 36; G.HADLEY, Nonlinear and Dynamic Programming, Reading, Mass.-Palo Alto-London 1964, S. 212/213.

Alle bekannteren Verfahren gehen deshalb von konkaven (bzw. konvexen bei Minimumaufgaben) Zielfunktionen mit semi-definiter Quadratform oder streng konkaven (bzw. konvexen) mit streng definiter Quadratform aus[1], weshalb es naheliegt, bei einer Einteilung der Lösungsverfahren in solche zu unterscheiden, die an den Extremanden die Forderung strenger Konkavität (im Minimumfall strenger Konvexität) stellen, und in solche, die für die Quadratform auch Semidefinitheit zulassen.

a. Die Forderung strenger Konkavität bzw. Konvexität des Extremanden bei einem quadratischen Programm stellen die Verfahren von C.G.HILDRETH, H.S. HOUTHAKKER, C.E.LEMKE und das Verfahren von H. THEIL und C. VAN DE PANNE.

b. Semidefinitheit der Quadratform ist zugelassen bei den Verfahren von E.M.L.BEALE, P.WOLFE, E.W. BARANKIN und R.DORFMAN, und bei der Methode von M.FRANK und P.WOLFE.

Da zur quadratischen Programmierung bereits eine umfangreiche Literatur vorliegt und zudem die meisten praktisch bedeutsamen Verfahren auf leichten Modifikationen der Simplex-Methode beruhen, kann auf eine Darstellung der einzelnen Verfahren verzichtet und

---

1) Die Bedeutung dieser Forderung wird sofort klar, wenn man sich das KUHN-TUCKER-Theorem vergegenwärtigt, das bekanntlich notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines Sattelpunktes der verallgemeinerten LAGRANGE-Funktion angibt, d.h. eines Punktes, bei dem diese Funktion ein Maximum hinsichtlich der Problemvariablen und ein Minimum bezüglich der Multiplikatoren annimmt.

Zum Beweis des KUHN-TUCKER-Theorems vgl. etwa K.J.ARROW, L.HURWICZ, H.UZAWA, Studies in Linear and Non-Linear Programming, Stanford, Cal. 1958, S. 32 ff.

auf die Literatur verwiesen werden[1].

C. Stufenweise Programmierung

I. Die generelle Struktur der 'dynamischen Programmierung'

Auch über die dynamische Programmierung existieren bereits zahlreiche Veröffentlichungen. Aus diesem Grunde sollen im folgenden nur die generelle Struktur und die wesentlichsten Fundamentaleigenschaften der dynamischen Programmierung aufgezeigt werden, wobei wir uns auf einen deterministischen, endlichen und diskreten Prozeß beschränken; im übrigen sei auf die Literatur verwiesen[2].

---

1) Es seien etwa genannt: J.C.G.BOOT, Quadratic Programming, Amsterdam 1965; P.WOLFE, The Simplex Method for Quadratic Programming, in: Econometrica (27) 1959, S. 382 ff.; A.W.TUCKER, Linear and Nonlinear Programming, in: Op.Res. (5) 1957, S. 224 ff.; J.C.G.BOOT, Notes on Quadratic Programming: The Kuhn-Tucker and Theil-Van de Panne Conditions, Degeneracy, and Equality Constraints, in: Man.Sci. (8) 1961, S. 85 ff.; E.M.L.BEALE, On Quadratic Programming, in: Nav. Res. Log. Quart. (6) 1959, S. 227 ff.; M.FRANK und P.WOLFE, An Algorithm for Quadratic Programming, in: Nav. Res. Log. Quart. (3) 1956, S. 95 ff.; C.HILDRETH, A Quadratic Programming Procedure, in: Nav. Res. Log. Quart. (4) 1957, S. 79 ff.; C.E.LEMKE, A Method for Solution of Quadratic Programs, in: Man.Sci. (8) 1962, S. 442 ff.; H.THEIL und C. VAN DE PANNE, Quadratic Programming as an Extension of Classical Quadratic Maximization, in: Man.Sci. (7) 1961, S. 1 ff.; H.S.HOUTHAKKER, The Capacity Method of Quadratic Programming, in: Econometrica (28) 1960, S. 62 ff.; W.S.DORN, On Lagrange Multipliers and Inequalities, in: Op.Res. (9) 1961, S. 95 ff.

2) Beispielhaft seien hier etwa genannt: R.BELLMAN, Dynamic Programming, Princeton, N.J. 1957; R. BELLMAN und ST.DREYFUS, Applied Dynamic Programming, Princeton, N.J. 1962; F.FERSCHL, Grundzüge des Dynamic Programming, in: Ufo (3) 1959, S. 70 ff.; R.BELLMAN, Bottleneck Problems, Functional Equations, and Dynamic Programming, in: Econometrica (23) 1955, S. 73 ff.; R.BELLMAN, Theory of Dynamic Programming, in: Modern Mathematics for the Engineer (Herausg.: E.F.BECKENBACH), New York-Toronto-London 1956, S. 243 ff.; R.BELLMAN, Some Problems in the Theory of Dynamic Programming, in: Econometrica (22) 1954, S. 37 ff.

Wir bezeichnen die Anzahl der Stufen dieses Prozesses mit N, den Zustandsvektor, d.h. den Vektor, der die möglichen Zustände des Systems auf einer Stufe enthält, mit $\mathfrak{z} = \langle z_0, z_1, \ldots, z_N \rangle$ und den Vektor aller möglichen Entscheidungen, die in einem gegebenen Zustand getroffen werden können, mit $\mathfrak{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_N \rangle$. Zu jeder Entscheidung x_k (k=1,2,.....,N) wird eine Transformation T festgelegt, so daß nach dem Treffen einer Entscheidung x_k beim Zustand z_{k-1} dadurch derjenige Zustand repräsentiert wird, dem wir uns auf der nächsten Stufe gegenübersehen.

In einem gegebenen Anfangszustand z_0 werde etwa eine Entscheidung x_1 getroffen. Hieraus resultiert ein neuer Zustand, der durch die Beziehung

$$(8) \qquad z_1 = T(z_0, x_1)$$

gegeben ist.

Wird nun wiederum eine Entscheidung x_2 getroffen, so resultiert daraus ein neuer Zustand z_2, wobei gilt

$$(9) \qquad z_2 = T(z_1, x_2).$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so ergibt sich für z_N

$$(10) \qquad z_N = T(z_{N-1}, x_N).$$

Bezeichnen wir etwa den Ertrag der k-ten Stufe eines N-stufigen Prozesses mit $f_k(z_{k-1}, x_k)$ und die Zielfunktion dieses Prozesses (mit dem Ausgangszustand z_0) mit

$$(11) \quad \left.\begin{aligned} &F(z_0, \mathfrak{x}) = f_1(z_0, x_1) + \ldots + f_N(z_{N-1}, x_N) \\ &\text{mit der Transformationsbeziehung} \\ &z_k = T(z_{k-1}, x_k) \end{aligned}\right\}$$

und definieren den Maximalwert des (Rest-)Prozesses mit $G_{N-(k-1)}(z_{k-1})$, so ergibt sich für $G_{N-(k-1)}(z_{k-1})$ aus der direkten Anwendung des BELLMAN'schen

Optimalitätsprinzips[1]:

$$(12)\quad G_{N-(k-1)}(z_{k-1}) = \max_{x_k} \left\{ f_k(z_{k-1}, x_k) + G_{N-k}\left[T(z_{k-1}, x_k) \right] \right\}$$

was einfach bedeutet, daß von jeder beliebigen Stufe des Prozesses ab der Maximalwert des noch verbleibenden Prozesses durch die Entscheidung bestimmt wird, "die das Ergebnis der Verknüpfung aus dem Einzelergebnis der betreffenden Stufe und dem dieser Stufe folgenden optimalen Prozeß optimiert"[2].

Die Beziehung (12) stellt nichts anderes dar als eine Formalisierung des Optimalitätsprinzips und kann unmittelbar zur praktischen Lösung von Programmierungsaufgaben herangezogen werden.

II. Hinweise auf Lösungsverfahren

Es ist eine spezifische Eigenschaft der dynamischen Programmierung, daß die aufzustellenden Rekursionsbeziehungen in außerordentlich hohem Maße von der speziellen Struktur des zu lösenden Problems abhängen. Aus diesem Grunde werden nur höchst selten zwei Probleme die gleiche Form der rekursiven Beziehungen aufweisen, was zur Folge hat, daß die Entwicklung von generellen Verfahren zur Lösung von dynamischen Problemen, wie sie etwa für lineare und quadratische Programmierungsaufgaben vorliegen, nahezu ausgeschlossen

---

1) "Eine optimale Politik hat die Eigenschaft, daß ungeachtet des Ausgangszustandes und der Ausgangsentscheidung die verbleibenden Entscheidungen eine optimale Politik bezüglich des aus der ersten Entscheidung resultierenden Zustandes darstellen". R.BELLMAN, Adaptive Control Processes, Princeton, N.J. 1961, S. 57. Eine gute Darstellung der Konsequenzen dieses Prinzips findet sich bei L.S.PONTRJAGIN, Mathematische Theorie optimaler Prozesse, München und Wien 1964, S. 72 ff.

2) D.ZSCHOCKE, a.a.O., S. 107; auch C.R.CARR und C. W.HOWE, Quantitative Decision Procedures in Management and Economics, New York-San Francisco-London 1964, S. 339.

ist. Dieser Nachteil der dynamischen Programmierung wird zum Teil wieder dadurch kompensiert, daß sich dynamische Programmierungsprobleme im allgemeinen einfacher für Elektronenrechner programmieren lassen als etwa lineare oder quadratische Aufgabenstellungen, wo die Programmierung eines generellen Verfahrens immer ein recht mühsames Unterfangen ist.

Die bisher einzige Methode, der im Rahmen der dynamischen Programmierung eine gewisse Allgemeinheit zukommt, ist der Algorithmus von R.HOWARD[1] zur Optimierung von MARKOFF-Prozessen, die sich bekanntlich von anderen stochastischen Prozessen dadurch unterscheiden, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten weder von der Zahl der Übergänge noch von der Zeit abhängen. Die Tatsache, daß sich MARKOFF-Prozesse dann optimieren lassen, wenn verschiedene Alternativen, denen jeweils andere Übergangs- und Zustandswahrscheinlichkeiten zugeordnet sind, den Ablauf des Prozesses beeinflussen, erlaubt die Anwendung eines Iterationsverfahrens, das von einer beliebig gewählten Alternative als Ausgangslösung ausgehend durch systematische Auswahl weiterer Alternativen für jeden Zustand des Systems in einer endlichen Anzahl von Schritten konvergiert. Das Optimum ist dann erreicht, wenn keine weitere Alternative das Ergebnis noch verbessern kann, was sich beim HOWARD-Algorithmus nur dadurch bestätigen läßt, daß nach Erreichen der Optimallösung eine weitere Iteration durchgeführt wird; das Optimalitätskriterium ist also nicht ganz so gut, wie dies etwa bei der Simplex-Methode der Fall ist[2].

---

1) R.HOWARD, Dynamische Programmierung und Markov-Prozesse (Deutsche Übersetzung von 'Dynamic Programming and Markov Processes'), Zürich 1965, insbes. S. 32 ff.

2) Vgl. H.WEDEKIND, Primal- und Dual-Algorithmen zur Optimierung von Markov-Prozessen, in: Ufo (8) 1964, S. 128 ff., insbes. S. 135; K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, a.a.O., S. 144 ff.

III. Teil: Entwicklung einer Folge von Entscheidungsmodellen zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage

Bevor an die eigentliche Konstruktion von Entscheidungsmodellen zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage herangegangen wird, sollen zuvor die modelltheoretisch bedingten generellen Annahmen der Untersuchung bezüglich der Beschaffungs- und Finanzierungsbedingungen sowie der Produktionsbedingungen der Unternehmung kurz aufgezeigt werden.

A. Die modelltheoretisch bedingten generellen Prämissen der Untersuchung

I. Die Annahmen bezüglich der Beschaffungsbedingungen

Es soll vereinfachend unterstellt werden, daß die Einstandspreise der Produktionsfaktoren der Unternehmung genau bekannt seien. Dies kann sowohl die notwendige Folge einer bestimmten morphologischen Struktur der Beschaffungsmärkte (homogener Markt) als auch etwa das Ergebnis von Verhandlungen mit den Lieferanten von Rohstoffen, Maschinen usw. sein. Auch sollen Probleme, wie sie etwa auf Grund quantitativer Beschaffungsrestriktionen und zufallsabhängiger Lieferzeiten bei der Planung des Produktionsprogrammes auftauchen können, aus der Untersuchung ausgeklammert werden.

II. Die Annahmen bezüglich der Finanzierungsbedingungen

Weiterhin soll angenommen werden, daß die finanzielle Lage der Unternehmung keine die Produktionspro-

grammplanung restringierende Nebenbedingung darstellt, was praktisch bedeutet, daß Liquiditätsstatus und Kapitalbedarf nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

III. Die Annahmen bezüglich der Produktionsbedingungen

Im folgenden soll von einem gegebenen Betrieb ausgegangen werden, d.h. Menge, Art und Qualität der vorhandenen fixen Produktionsfaktoren seien unveränderlich, wodurch gleichzeitig auch die Kapazität des Betriebes fest vorgegeben ist. Unter der Kapazität des Betriebes soll hier die mögliche Ausbringungsmenge pro Zeiteinheit verstanden werden. Hierdurch werden Investitionsprobleme, wie sie etwa bei einer Kapazitätserweiterung auftreten, und Desinvestitionsprobleme (etwa bei einer Kapazitätsverminderung) aus der Untersuchung ausgeklammert und Ersatzinvestitionen nur so weit zugelassen, wie sie zur Erhaltung der gegebenen Kapazität dienen; es mögen aber hierfür keine Restriktionen vorliegen.

Bezüglich der mengenmäßigen Relation zwischen dem Einsatz an Produktionsfaktoren und dem mengenmäßigen Ergebnis des Faktoreinsatzes, d.h. der Produktionsfunktion[1], können grundsätzlich nach der Art der Beziehung, die zwischen den zur Durchführung eines Produktionsprozesses erforderlichen Faktormengen und der Produktmenge vorliegt, und die in Substitutionalität oder in Limitationalität bestehen kann, Produktionsfunktionen mit substitutionalen Faktoren und solche mit limitationalen Faktoren unterschieden

1) Zur Definition der Produktionsfunktion vgl. etwa G.LASSMANN, Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung für die betriebswirtschaftliche Kostentheorie, Köln und Opladen 1958, S. 18; W.KILGER, Produktions- und Kostentheorie, in: Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1958, S. 11.

werden[1)2)].

Im folgenden sollen ausschließlich Produktionsfunktionen mit limitationalen Faktoren betrachtet werden, da diese Art von Produktionsfunktionen der Realität in der modernen Industrie am nächsten kommt und deshalb als Grundlage der Bildung von Entscheidungsmodellen geeigneter erscheint als die sogenannten klassischen Produktionsfunktionen (ertragsgesetzliche, z.B. die Produktionsfunktion vom COBB-DOUGLAS-Typ[3)], die im wesentlichen nur als Erklärungsmodelle Bedeutung haben.

Auch hier möge angenommen werden, daß die Unternehmung von vollkommener Kenntnis ausgehen kann, insbesondere mögen die Produktionskoeffizienten genau (oder mit einer vernachlässigbar kleinen Streuung) bekannt sein. Da bereits auch die Einstandspreise der Produktionsfaktoren als bekannt angenommen wurden, folgt hieraus konsequenterweise, daß bezüglich der auf den Produktionsfunktionen aufbauenden Kostenfunktionen unterstellt werden soll, daß sie genau bekannt sind, was selbstverständlich in gewisser Weise Konstanz der Produktionsbedingungen im Zeitablauf voraussetzt.

B. Einstufige stochastische Entscheidungsmodelle

I. Einführung stochastischer Nachfrage in das Standardmodell der linearen Produktionsprogrammplanung

1. Das Standardmodell der linearen Produktionsprogrammplanung

Im Standardmodell der linearen Produktionsprogramm-

---

1) Vgl. hierzu etwa auch die Einteilung bei B. BLASCHKA, Betrachtungen zur industriellen Produktionsfunktion, in: ZfB (27) 1957, S. 436 ff.; K.FÖRSTNER, Betriebs- und volkswirtschaftliche Produktionsfunktionen, in: ZfB (32) 1962, S. 266.

2) Zum Begriff von Substitutionalität und Limitationalität vgl. etwa E.SCHNEIDER, Einführung, II. Teil, a.a.O., S. 163 ff.

3) Vgl. W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 51 ff.

planung[1], dessen mathematische Formulierung durch

$$(13)\quad \sum_j c_j x_j - K_F \overset{!}{=} \text{Max.}$$

unter den (linearen) Nebenbedingungen

$$(14)\quad \sum_j a_{ij} x_j \leqslant b_i$$

und

(15)

$$x_j \geqq 0\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

wiedergegeben werden kann, bedeuten
der (konstante) Parameter c_j den Bruttostückgewinn der j-ten Produktart (Verkaufspreis p_j - variable Kosten pro Einheit k_j, jeweils bezogen auf die Einheit der Produktart j),
x_j die Produktions- (bzw. Absatzmenge) der Produktart j in der Planungsperiode,
K_F die fixen Kosten der Planperiode,
der (konstante) Koeffizient a_{ij} diejenige Einsatzmenge des Produktionsfaktors i, die zur Herstellung einer Einheit von Produktart j erforderlich ist (Produktionskoeffizient),
b_i die pro Planperiode (beschränkt) zur Verfügung stehende Menge des Produktionsfaktors i,
n die Anzahl der Produktarten und
m die Anzahl der Produktionsfaktorarten.

Wie man unmittelbar sieht, handelt es sich hierbei um ein lineares Programmierungsproblem einfachster Form, das sich ohne weiteres mit der Simplex-Methode lösen läßt.

Kann nicht mehr von vorneherein von Gleichheit von Produktion und Absatz ausgegangen werden, weil die Nachfragemengen nicht mehr genau bekannt, sondern

1) Zum Standardmodell vgl. etwa M.J. BECKMANN, Lineare Planungsrechnung, Linear Programming, Ludwigshafen 1959, S. 25/26; S.DANØ, Linear Programming in Industry, Theory and Applications, Wien 1960, S. 2.

Zufallsvariable sind, so erfährt das Modell eine wesentliche Modifikation, insbesondere führt ein solches Problem zu einer nichtlinearen Programmierungsaufgabe, wie im folgenden gezeigt werden soll.

2. Formulierung des stochastischen Modelles

Hierzu betrachten wir folgendes Problem:
Eine Unternehmung produziere n Produktarten, von deren Mengen x_j (j=1,2,...,n) angenommen wird, daß sie beliebig teilbar sind. Zur Verfügung stehen ihr m Produktionsfaktorarten, deren Kapazität beschränkt sei; Anpassungsprozesse seien nicht möglich. Die Unternehmung möge die Verkaufspreise ihrer Produkte als Datum ansehen, sich also als Mengenanpasser verhalten. Auf die dafür maßgebenden Gründe braucht hier nicht näher eingegangen zu werden; es sei nur darauf hingewiesen, daß dies nun keinesfalls bedeutet, daß atomistische Konkurrenz auf vollkommenen Märkten vorliegen muß, eine Marktform, die nur als Erklärungsmodell Bedeutung hat. Denn auch Unternehmungen, die auf dem Markt als Alleinanbieter auftreten, können kurzfristig ihre Preise konstant halten, etwa weil sie durch zu häufige Preisänderungen negative Reaktionen der Abnehmer ihrer Produkte befürchten. Starre Preise sind ebenfalls kennzeichnend für Polypole und für die zahlreichen oligopolähnlichen Situationen in der Wirtschaft, insbesondere dann, wenn die Grenzkostenkurve durch das Unstetigkeitsintervall der Grenzerlöskurve verläuft. Weiterhin könne die Unternehmung von konstanten Einstandspreisen für die Produktionsfaktoren und von linearlimitationalen (LEONTIEF-) Produktionsfunktionen ausgehen, d.h. der Verlauf der variablen Produktionskosten sei linear.

Es handelt sich also bisher um das gleiche Problem wie bei dem Standardmodell der linearen Produktionsprogrammplanung. Abweichend hiervon möge aber nun

angenommen werden, daß die Nachfrage y_j nach der Produktart j nicht genau bekannt, sondern eine (stetige) Zufallsvariable mit der Dichtefunktion $\varphi_j(y_j)$ sei, von der unterstellt wird, daß sie der Unternehmung bekannt ist. Ziel der Unternehmung sei es, den Erwartungswert des Gewinnes (EG) einer Periode zu maximieren.

a. Formulierung der Zielfunktion

Da die Unternehmung bei stochastischer Nachfrage für ihre Produkte nicht damit rechnen kann, daß Produktion und Nachfragemengen einer Planperiode für ihre n Produktarten übereinstimmen, müssen Überlegungen darüber angestellt werden, zu welchen kostenmäßigen Konsequenzen eine zu geringe Produktion ($x_j < y_j$) und eine Überproduktion ($x_j > y_j$) führen können.

Im Falle einer Unterproduktion besteht natürlich die Möglichkeit, daß die Unternehmung in der Lage ist, ihren Kunden Lieferzeiten aufzuzwingen, wobei wiederum zu unterscheiden ist, ob die Kunden sehr geduldig sind und auch lange Lieferzeiten in Kauf nehmen wollen, oder ob sie mit einer gewissen Lieferzeit einverstanden sind und erst nach Ablauf dieser Frist ihren Bedarf bei anderen Unternehmungen decken. Wir wollen aber von diesen Fällen absehen und annehmen, daß die Kunden ungeduldig sind und jede nicht lieferbare Mengeneinheit einer Produktart sofort bei einem Konkurrenzunternehmen beschaffen. Da nicht damit gerechnet werden kann, daß mangelnde Lieferfähigkeit ohne Nachwirkungen bei den Abnehmern bleibt, sollen für nicht lieferbare Mengen einer Produktart Goodwill-Verluste angesetzt werden. Goodwill-Verluste kann man definieren als Verluste an "akquisitorischem Potential"[1], wobei wir uns natürlich darüber klar sein müssen, daß eine solche komplexe Größe einer Quantifizierung nicht immer leicht zugänglich ist. Einen gewissen Anhaltspunkt für die

1) E.GUTENBERG, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 2. Band: Der Absatz, 4. Aufl., Berlin - Göttingen - Heidelberg 1962, S. 221.

Höhe der Goodwill-Verluste bieten diejenigen Kosten, die notwendig sind, um den Verlust an akquisitorischem Potential wieder auszugleichen, d.h. das akquisitorische Potential wieder auf den Stand zu bringen, den es vor dem Eintritt der Goodwill-Verluste hatte. Vereinfachend möge jedoch hier angenommen werden, daß das Ausmaß der Goodwill-Verluste der Unternehmung bekannt sei, und zwar möge für jede nicht lieferbare Einheit der Produktart j ein konstanter Goodwill-Verlust in Höhe von g_j entstehen. Auch diese Annahme stellt insofern eine Vereinfachung dar, als auch in dem Fall, daß man sich über die entstehenden Goodwill-Verluste mit ausreichender Genauigkeit hinsichtlich ihrer Größenordnung klar werden kann, wird in den meisten Fällen eine Verärgerung der Kunden, und damit ein Auftreten von Goodwill-Verlusten, nicht sofort bei der ersten nicht lieferbaren Mengeneinheit einer Produktart auftreten, sondern erst ab einer bestimmten Mindestmenge (oder einer bestimmten Anzahl von Fällen, in denen die Abnehmer nicht beliefert werden konnten). Weiterhin wird dann nach einem Überschreiten dieser Mindestanzahl von Fällen das Ausmaß der Goodwill-Verluste nicht proportional, sondern möglicherweise überproportional steigen, weil damit gerechnet werden muß, daß die Nachfrager nach den von der Unternehmung produzierten Erzeugnissen miteinander in Verbindung stehen, wodurch sich darüber hinaus auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Nachfrage nach einer Produktart ändern kann.

Ist die Nachfrage nach einer Produktart kleiner als die innerhalb einer Periode hergestellte Menge, so besteht grundsätzlich die Möglichkeit, die zuviel produzierten Mengen sofort zu einem niedrigeren Verkaufspreis auf dem Markt anzubieten, oder sie zu lagern, um sie in späteren Planperioden zu höheren, gleichen oder niedrigeren Preisen abzusetzen. Wir wollen hier vereinfachend unterstellen, daß über-

produzierte Mengen innerhalb der betrachteten Periode überhaupt nicht abgesetzt werden können, daß also der erwartete Periodengewinn um die variablen Produktionskosten der produzierten, aber nicht abgesetzten Mengen der einzelnen Produktarten gemindert wird, und darüber hinaus annehmen, daß hierdurch noch zusätzliche (nicht im Fixkostenblock K_F der Unternehmung enthaltene) Kosten für Lagerung und Verpackung der nicht abgesetzten Produkte anfallen, wofür ein als konstant angenommener Satz von l_j pro überschüssiger Mengeneinheit der Produktart j anfallen möge.

Dann betragen unter den von uns getroffenen Annahmen die erwarteten Kosten einer zu geringen Produktion ($x_j < y_j$) für die Produktart j

$$EV_j = g_j \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\ \varphi_j(y_j)\ dy_j,$$

die erwarteten Kosten einer Überproduktion ($x_j > y_j$) für Erzeugnisart j

$$EH_j = l_j \int_{0}^{x_j} (x_j - y_j)\ \varphi_j(y_j)\ dy_j$$

und die erwarteten Erlöse für Produktart j

$$\begin{array}{ll} p_j y_j & \text{für } y_j \leq x_j \\ p_j x_j & \text{für } y_j > x_j \end{array}$$

$$EE_j = p_j \left[\int_{0}^{x_j} y_j\ \varphi_j(y_j)\ dy_j + x_j \int_{x_j}^{\infty} \varphi_j(y_j)\ dy_j \right].$$

Bezeichnen wir die variablen Produktionskosten für die Produktart j mit $k_j x_j$ und mit K_F die fixen Kosten der Unternehmung in der betrachteten Planperiode, dann lautet die Zielfunktion (für Produktart j):

$$\begin{aligned} (16)\quad EG_j = \Big\{ & p_j \left[\int_{0}^{x_j} y_j\ \varphi_j(y_j)\ dy_j + x_j \int_{x_j}^{\infty} \varphi_j(y_j)\ dy_j \right] \\ & - k_j x_j - g_j \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\ \varphi_j(y_j)\ dy_j \\ & - l_j \int_{0}^{x_j} (x_j - y_j)\ \varphi_j(y_j)\ dy_j - K_F \Big\} \overset{!}{=} \text{Max.} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist aber in der vorliegenden Form recht unhandlich, weshalb er umgeformt werden soll: Die erwarteten Kosten einer zu hohen Produktion lassen sich offenbar auch als

$$l_j \int_0^{x_j} (x_j - y_j)\ \varphi_j(y_j)\ dy_j = l_j\ (x_j - \bar{m}_j) + l_j \cdot \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\ \varphi_j(y_j)\ dy_j$$

schreiben[1]. Eine ähnliche Umformung ist auch für die erwarteten Erlöse möglich, und zwar kann für

$$p_j \left[\int_0^{x_j} y_j\ \varphi_j(y_j)\ dy_j + x_j \int_{x_j}^{\infty} \varphi_j(y_j)\ dy_j \right]$$

wegen

$$\int_0^{\infty} y_j\ \varphi_j(y_j)\ dy_j = \bar{m}_j,$$

wobei $\bar{m}_j$ die erwartete Nachfrage für Produktart j (Erwartungswert) bezeichnet, und

$$p_j \left[\bar{m}_j - \int_{x_j}^{\infty} y_j\ \varphi_j(y_j)\ dy_j + \int_{x_j}^{\infty} x_j\ \varphi_j(y_j)\ dy_j \right]$$

und

$$p_j \left[\bar{m}_j - \int_{x_j}^{\infty} (-y_j + x_j)\ \varphi_j(y_j)\ dy_j \right]$$

und

$$p_j \left[\bar{m}_j + \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\ \varphi_j(y_j)\ dy_j \right]$$

auch

$$p_j\ \bar{m}_j + p_j \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\ \varphi_j(y_j)\ dy_j$$

geschrieben werden.

Diese Umformungen ermöglichen es, die Zielfunktion der Unternehmung (für n Produktarten) in folgender Form zu schreiben:

---

1) Vgl. hierzu auch G.HADLEY, Nonlinear and Dynamic Programming, a.a.O., S. 162.

$$(16)'\quad EG = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{m}_j - \sum_{j=1}^{n} k_j x_j - \sum_{j=1}^{n} l_j (x_j - \bar{m}_j) - \sum_{j=1}^{n} (p_j + g_j + l_j) \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j) \varphi_j(y_j)\, dy_j - K_F \Big\} \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

b. Formulierung der Nebenbedingungen

Die Nebenbedingungen unterscheiden sich gemäß unseren Annahmen nicht von denen des Standardmodells der linearen Produktionsprogrammplanung, d.h. die Kapazitätsbeschränkung lautet

$$(14)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

und die Nicht-Negativitätsbedingung

$$(15)\quad x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die a_{ij} die (konstanten) Produktionskoeffizienten und die b_i die verfügbaren Mengen der produktiven Faktoren bezeichnen.

3. Hinweise auf Lösungsverfahren

Bei dem durch (16)', (14) und (15) beschriebenen Problem handelt es sich, wie man unmittelbar erkennt, um eine nichtlineare Programmierungsaufgabe, die gegenüber nichtlinearen Programmierungsaufgaben allgemeinerer Form (nichtlineare Zielfunktion, nichtlineare Nebenbedingungen) den wesentlichen rechnerischen Vorteil besitzt, daß die Nebenbedingungen linear sind und, geometrisch gesehen, ein konvexes Polyeder mit einer endlichen Anzahl von Ecken darstellen. Aber auch in diesem Falle ist damit nicht gewährleistet, daß man das globale Maximum erreicht und nicht nur auf ein lokales Optimum stößt. Grund-

sätzlich könnte auch hier unmittelbar versucht werden, die Zielfunktion auf ein lineares Programm dadurch zurückzuführen, daß man (16)' durch einen stückweise linearen Streckenzug approximiert. Beim Vorliegen mehrerer lokaler Optima besteht bei einem solchen Vorgehen aber immer die Gefahr, nur ein lokales Optimum zu erreichen, zumal es im allgemeinen kein Anzeichen dafür gibt, daß die erhaltene Lösung auch tatsächlich das globale Maximum darstellt. Zweckmäßiger erscheint deshalb zunächst folgender Weg: Da Konstanten auf die Lage des Extremwertes einer Funktion keinen Einfluß haben, liegt es nahe, zunächst alle Konstanten aus der Zielfunktion zu eliminieren und sie zur Errechnung der absoluten Höhe des erwarteten Gewinnes der betrachteten Planperiode anschließend zu addieren bzw. zu subtrahieren.

Zunächst brauchen als Konstante K_F und $\sum_{j=1}^{n} p_j \bar{m}_j$ in der Zielfunktion nicht betrachtet zu werden. Darüber hinaus ist aber noch eine weitere Vereinfachung möglich, und zwar kann der Ausdruck

$$- \sum_{j=1}^{n} k_j x_j - \sum_{j=1}^{n} l_j (x_j - \bar{m}_j)$$

auch als

$$- \sum_{j=1}^{n} (k_j + l_j) x_j + \sum_{j=1}^{n} l_j \bar{m}_j$$

geschrieben werden.

Nun ist aber auch $\sum_{j=1}^{n} l_j \bar{m}_j$ (genau wie $\sum_{j=1}^{n} p_j \bar{m}_j$) eine Konstante, so daß sich (16)' in vereinfachter Form

durch

$$(16)'' \quad \overline{EG} = \Big\{ - \sum_{j=1}^{n} (k_j + l_j)\, x_j - \sum_{j=1}^{n} (p_j + g_j + l_j) \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\, \varphi_j(y_j)\, dy_j \Big\} \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

wiedergeben läßt.

Bekanntlich stellt bei einer nichtlinearen Programmierungsaufgabe, wie sie hier etwa durch (16)'', (14) und (15) repräsentiert wird, ein lokales Optimum nur dann auch ein globales Optimum dar, wenn die Zielfunktion konkav bzw. konvex ist.[1] Wir haben deshalb die diesbezüglichen Eigenschaften der Funktion (16)'' zu untersuchen.
Nun ist (k+l)x als Linearform sowohl konvex als auch konkav (beides natürlich nicht streng), folglich ist auch $\sum_{j=1}^{n} (k_j+l_j)x_j$ konvex wie auch konkav.
Es ist deshalb nur noch die Eigenschaft von $\int_x^{\infty} (y-x)\, \varphi(y)\, dy$ zu untersuchen. Wie sich aber leicht zeigen läßt, ist diese Funktion konvex[2], folglich ist

$$- \sum_{j=1}^{n} (p_j+g_j+l_j) \int_{x_j}^{\infty} (y_j-x_j)\, \varphi_j(y_j)\, dy_j$$

konkav.

---

1) Vgl. in diesem Zusammenhang auch das KUHN-TUCKER - Theorem.

2) Zur Definition von Konvexität bzw. Konkavität vgl. etwa G.VALIRON, Théorie des Fonctions, 2. Aufl., Paris 1955, S. 79 ff.; G.B.DANTZIG, Linear Programming under Uncertainty, in: Mathematical Studies in Management Science (Herausg.: A.F.VEINOTT, Jr.), New York und London 1965, S. 333 ff. und dort zum Beweis vor allem das Theorem von H.SCARF.

Wir haben es also bei (16)'' mit einer zerlegbaren konkaven Zielfunktion zu tun, die ohne weiteres mit den üblichen bekannten Methoden linear approximiert werden kann[1].

Eine Untersuchung der Konkavitäts- bzw. Konvexitätseigenschaften der Zielfunktion entfällt, wenn das Problem direkt in ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm übergeführt wird, was auf einfache Weise dadurch geschehen kann, daß eine Menge von Hilfsvariablen, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen dürfen, eingeführt wird. Von einem solchen Vorgehen ist aber bei dem von uns formulierten Problem aus praktischen Gründen abzuraten. Denn durch die Aufspaltung der Variablen des Problems und die Einführung von Hilfsvariablen, für die, um zu sichern, daß auch tatsächlich das globale Maximum erreicht wird, noch eine Reihe von Nebenbedingungen eingeführt werden muß, wird das Problem derart umfangreich, daß eine Anwendung der gemischt-ganzzahligen linearen Programmierung nicht praktikabel erscheint, wozu die oft außerordentlich schlechte Konvergenz des GOMORY-Algorithmus erschwerend hinzutritt.

Grundsätzlich hätte auch die Möglichkeit bestanden, die von uns betrachtete nichtlineare Programmierungsaufgabe als stufenweises (oder 'dynamisches') Programmierungsproblem zu formulieren und zu lösen. Dies hätte den Vorteil gehabt, daß weder die vorge-

---

1) Es seien hier etwa genannt: C.R.CARR und C.W.HOWE, a.a.O., S. 229/230; A.CHARNES und C.LEMKE, Minimization of Nonlinear Separable Convex Functions, in: Nav. Res. Log. Quart. (1) 1954, S. 301 ff.; R.E.GRIFFITH und R.A.STEWART, A Nonlinear Programming Technique for the Optimization of Continuous Processing Systems, in: Man. Sci. (7) 1961, S. 379 ff.; G.B.DANTZIG, S.JOHNSON, W. WHITE, A Linear Programming Approach to the Chemical Equilibrium Problem, in: Man. Sci. (4) 1958, S. 38 ff.; S.VAJDA, Mathematical Programming, a.a.O., S. 218 ff.

nommenen Umformungen noch eine Untersuchung der Konkavitätseigenschaften des Extremanden erforderlich gewesen wären, weil die dynamische Programmierung unabhängig von der Anzahl der lokalen Optima notwendigerweise immer zum globalen Optimum führt. Obwohl die dynamische Programmierung aus diesen Gesichtspunkten heraus den zunächst etwas umständlich wirkenden Approximationsverfahren bei weitem überlegen erscheint, so ist das von uns geübte Vorgehen für die meisten praktischen Situationen dennoch vorzuziehen, und zwar aus folgendem Grunde.

Eine ganz wesentliche Schwierigkeit bei der Anwendung der dynamischen Programmierung auf Programmierungsprobleme (sowohl lineare als auch nichtlineare) liegt in der Anzahl der Zustandsparameter begründet. Nun ist aber die Anzahl der Zustandsparameter gleich der Anzahl der Nebenbedingungen, in (14) also m. Kann nun seinerseits jeder Zustandsparameter wieder k Werte annehmen, so sind beim Tabellieren m^k Kombinationen zu betrachten. Man sieht unmittelbar ein, daß bei Problemen, bei denen die Anzahl der Nebenbedingungen, etwa von der Form (14), einen gewissen Umfang überschreitet, wie es in der Praxis oft zu sein pflegt, eine Anwendung der dynamischen Programmierung zwar theoretisch immer möglich ist, sehr bald aber doch ihre praktische Grenze findet und den mit effizienteren Algorithmen arbeitenden linearen Approximationsverfahren unterlegen ist.

Die Situation wäre eine andere, wenn wir in unserem Problem nicht hätten zeigen können, daß die Zielfunktion konkav ist, und außerdem noch von den Entscheidungsvariablen Ganzzahligkeit gefordert hätten. Dann wäre die dynamische Programmierung das problemadäquate, und darüber hinaus einzig mögliche Lösungsverfahren gewesen. Dieser Fall sollte aber in unserem

Modell nicht betrachtet werden.

Welcher der von uns aufgezeigten Lösungswege tatsächlich eingeschlagen wird, ist eine Frage der Rechenökonomie und hängt in erster Linie vom praktischen Problem ab. Denn auch bei Programmierungsaufgaben gibt es so etwas wie eine 'kritische Menge', d.h. eine Anzahl von Problemvariablen und Nebenbedingungen, bei denen ein Verfahren effizienter wird als eine andere Methode der mathematischen Programmierung, und die man vielleicht als 'kritische Dimension bezeichnen könnte. Hierbei ist wiederum zu unterscheiden, ob die sich aus der Dimension des Problems ergebenden Schwierigkeiten bei der praktischen Lösung einer mathematischen Programmierungsaufgabe aus der Dimension des Entscheidungsvektors oder aus der Dimension des Begrenzungsvektors resultieren. Schwierigkeiten, die in der Dimension des Entscheidungsvektors liegen, können im allgemeinen verhältnismäßig leicht durch die stufenweise Programmierung überwunden werden, und zwar durch eine entsprechende Vergrößerung der Anzahl der Stufen, während Probleme mit umfangreichen Nebenbedingungen (etwa vom Typ (14)) im allgemeinen der simultanen Programmierung leichter zugänglich sind.

4. Interpretation der Modellergebnisse

Wir haben zu zeigen versucht, daß die Einführung stochastischer Nachfrage in das Standardmodell der linearen Produktionsprogrammplanung (unter sonst gleichen Annahmen) zu einer nichtlinearen Programmierungsaufgabe führt, und einen Weg aufgezeigt, wie ein solches Problem in einen Ansatz übergeführt werden kann, der sich mit den gängigen Approximationsmethoden lösen läßt. Hierbei wurde zunächst davon ausgegangen, daß die Unternehmung in ihrem Planungskalkül weder mit Mindest- noch mit Höchst-

mengen zu rechnen hat, eine Annahme, die nicht immer realistisch ist. Weiterhin wurde unterstellt, daß die Nachfragemengen voneinander unabhängige Zufallsvariable sind, was sehr oft nicht gerechtfertigt erscheint, weil hierdurch nachfragemäßige Verflechtungen der Erzeugnisse im Produktionsprogramm außerhalb der Betrachtung bleiben. Eine Untersuchung, die sich die Aufgabe gestellt hat, Probleme der Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage aufzuzeigen und einer Lösung zuzuführen, muß versuchen, auch den Gesichtspunkten nachfragemäßig verflochtener Erzeugnisse im Produktionsprogramm Rechnung zu tragen. Zuvor soll jedoch gezeigt werden, welche Modifikation das bisher aufgezeigte stochastische Modell erfährt, wenn Mindest- und Höchstmengen bei der Produktionsprogrammplanung berücksichtigt werden müssen.

II. Modifikation des Modelles durch die Einführung von Mindest- und Höchstmengen

Hierzu betrachten wir das gleiche Problem wie im ersten Modell, allerdings möge die Unternehmung auf Grund vertraglicher Lieferverpflichtungen und aus absatzpolitischen Gründen bei der Gestaltung des Produktionsprogrammes gezwungen bzw. gewillt sein, bestimmte Mindestmengen von ihren Erzeugnissen zu produzieren. Die Unternehmung sieht etwa einige ihrer Produkte als besonders förderungswürdig an und möchte hiervon Mindestmengen auf dem Markt anbieten, wodurch sie sich gleichzeitig einen gewissen werbenden Effekt des Produktionsprogrammes verspricht. Gleichzeitig mögen der Unternehmung Angaben darüber vorliegen, welche Produktartenmengen maximal abgesetzt werden können; diese Werte mögen teils durch intensive Marktbeobachtungen und teils durch Schätzungen auf Grund von Erfahrungswerten gewonnen sein. Da es in einstufigen Programmplanungsmodellen nicht sinnvoll erscheint, von einer Produktart mehr zu produzieren,

als von ihr maximal überhaupt abgesetzt werden kann, geht es bei dieser Modifikation des vorliegenden Modelles im deterministischen Fall zunächst darum, diesen für die Programmplanung vorgegebenen Mengenspielraum unter Beachtung der sich in den Kapazitätsrestriktionen niederschlagenden konkreten Betriebssituation in der Weise auszunutzen, daß der Gewinn der Unternehmung für die betrachtete Planperiode ein Maximum wird.

Bezeichnet man nun die von der Produktart j (j = 1, 2, ..., n) zu produzierende Mindestmenge mit α_j und die Höchstmenge mit β_j, wobei β_j eine beliebig große Zahl sein kann, dann lassen sich die für die zu produzierenden Mengen x_j bestehenden Restriktionen allgemein als

$$(17) \quad \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

schreiben.

Bevor nun an die Konstruktion des stochastischen Modelles herangegangen wird, empfiehlt sich eine Umformung des Standardmodelles der linearen Produktionsprogrammplanung (13), (14) und (15) in folgender Weise:

Bezeichnet man mit $\tilde{x}_j = x_j - \alpha_j$ die variable Produktion von Produktart j, dann ändert sich das Problem (13), (14), (15) auf Grund der Tatsache, daß nur noch über die Mengen innerhalb des durch die Mindest- und Höchstmengen vorgegebenen Spielraumes eine Entscheidung zu treffen ist - die Mindestmengen müssen ja sowieso produziert werden, und über die Höchstmengen hinausgehende Produktartenmengen brauchen als für den Kalkül nicht relevant gar nicht erst betrachtet zu werden - zu dem linearen Programm

$$(18) \quad \sum_j c_j \tilde{x}_j \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

unter den Nebenbedingungen

$$(19)\quad \sum_j a_{ij}\,\tilde{x}_j \leq s_i \qquad \left(s_i = b_i - \sum_j a_{ij}\,\alpha_j \right)$$

und

$$(20)\quad \begin{cases} \tilde{x}_j \leq \gamma_j \\ \tilde{x}_j \geq 0 \,, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \qquad\quad i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}^{1)}.$$

1. Formulierung der Zielfunktion

Kann nicht mehr wie im deterministischen Fall von vollkommener Voraussicht über die innerhalb des betrachteten Mengenspielraumes tatsächlich nach einer Produktart eintretende Nachfragemenge ausgegangen werden, sondern liegen nur Angaben über die Verteilungs- bzw. Dichtefunktionen vor, dann kann man beim Vorliegen von Höchst- und Mindestgrenzen für die zu betrachtenden Produktarten folgendermaßen vorgehen:

Betrachten wir zunächst die erwarteten Erlöse für Produktart j. Da über die (etwa auf Grund vertraglicher Lieferverpflichtungen) zu produzierenden Mindestmengen bei der Planung des Produktionsprogrammes keine Entscheidung mehr getroffen zu werden braucht, können die Erlöse hierfür aus dem Planungsansatz ausgeklammert werden. Ebenfalls brauchen Produktartenmengen, die über die (etwa auf Grund von Erfahrungsgrößen) gewonnenen Höchstwerte hinausgehen, im Kalkül nicht berücksichtigt zu werden, da sie von der Unternehmung als praktisch nicht relevant angesehen werden.

Bezeichnen wir nun mit γ_j die Maximalmenge der variablen Produktion (d.h. die positive Differenz zwischen der Höchstmenge β_j und der Mindestmenge α_j) von Produktart j und mit $E\tilde{E}_j$ den (verkürzten) Erwartungswert für die Erlöse von Produktart j, dann wird $E\tilde{E}_j$ analog den Ausführungen zum ersten Modell offenbar gegeben

1) Vgl. auch W.FIESCH, Über einige Modelle der Absatzplanung, in: Ufo (3) 1959, S. 54.

durch

$$E\tilde{E}_j = p_j\left[\int_{\circ}^{\tilde{x}_j} y_j\, \varphi_j(y_j)\, dy_j + \tilde{x}_j \int_{\tilde{x}_j}^{\gamma_j} \varphi_j(y_j)\, dy_j\right].$$

Hierbei ist zu beachten, daß $\varphi_j(y_j)$ natürlich hier nur die für den Mengenspielraum relevante Dichtefunktion bezeichnet. Führen wir nun in der bereits bekannten Weise die Kosten einer Über- bzw. Unterproduktion ein[1)], dann lautet die Zielfunktion für Produktart j (zunächst unter ausschließlicher Berücksichtigung von Kosten der Überproduktion)

$$\begin{aligned} E\tilde{G}_j = {} & p_j\left[\int_{\circ}^{\tilde{x}_j} y_j\, \varphi_j(y_j)\, dy_j + \tilde{x}_j \int_{\tilde{x}_j}^{\gamma_j} \varphi_j(y_j)\, dy_j\right] \\ & - l_j\left\{\tilde{x}_j - \left[\int_{\circ}^{\tilde{x}_j} y_j\, \varphi_j(y_j)\, dy_j + \tilde{x}_j \int_{\tilde{x}_j}^{\gamma_j} \varphi_j(y_j)\, dy_j\right]\right\} \\ & - k_j \tilde{x}_j \,. \end{aligned}$$

Dieser unhandliche Ausdruck soll zunächst vereinfacht werden. Für

$$\int_{\circ}^{\tilde{x}_j} y_j\, \varphi_j(y_j)\, dy_j + \tilde{x}_j \int_{\tilde{x}_j}^{\gamma_j} \varphi_j(y_j)\, dy_j$$

kann wegen

$$\left[y_j\, \Phi_j(y_j)\right]_{\circ}^{\tilde{x}_j} - \int_{\circ}^{\tilde{x}_j} \Phi_j(y_j)\, dy_j + \tilde{x}_j\left[1 - \Phi_j(\tilde{x}_j)\right],$$

wobei $\Phi_j(y_j)$ die Verteilungsfunktion bezeichnet, und wegen

$$\tilde{x}_j\, \Phi_j(\tilde{x}_j) - \int_{\circ}^{\tilde{x}_j} \Phi_j(y_j)\, dy_j + \tilde{x}_j - \tilde{x}_j\, \Phi_j(\tilde{x}_j)$$

und, da sich der erste und der letzte Ausdruck gegenseitig aufheben, auch als

$$\tilde{x}_j - \int_{\circ}^{\tilde{x}_j} \Phi_j(y_j)\, dy_j$$

---

1) Vgl. S. 49 - 53.

oder

$$\tilde{x}_j = \int_0^{\tilde{x}_j} \left[1 - W_j(y_j) \right] dy_j$$

geschrieben werden, wobei $W_j(y_j)$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß von der Produktart j mindestens die Menge y_j abgesetzt werden kann[1].

Wegen

$$W_j(y_j) = 1 - \Phi_j(y_j)$$

und

$$\tilde{x}_j = \int_0^{\tilde{x}_j} 1 \, dy_j + \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j) \, dy_j$$

und

$$\tilde{x}_j - \tilde{x}_j + \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j) \, dy_j = \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j) \, dy_j$$

kann also der Ausdruck für die Zielfunktion (für Produktart j) unter Berücksichtigung von Kosten der Überproduktion geschrieben werden als

$$E\tilde{G}_j = p_j \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j) \, dy_j - l_j \left[\tilde{x}_j - \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j) \, dy_j \right] - k_j \tilde{x}_j .$$

Unter Berücksichtigung von Goodwill-Verlusten im Falle einer zu geringen Produktion ergibt sich für den erwarteten Gewinn für Produktart j

$$E\tilde{\tilde{G}}_j = p_j \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j) \, dy_j + g_j \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j) \, dy_j - g_j \int_0^{x_j} W_j(y_j) \, dy_j - k_j \tilde{x}_j .$$

Unter Zusammenfassung dieser Ausdrücke läßt sich die Zielfunktion der Unternehmung (für n Produktarten) endgültig wie folgt schreiben:

---

1) Vgl. hierzu W.PIESCH, a.a.O., S. 55 ff.

$$(21)\quad \widetilde{EG} = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} (p_j + l_j + g_j) \int_{\circ}^{\tilde{x}_j} W_j(y_j)\, dy_j - \sum_{j=1}^{n} g_j \int_{\circ}^{y_j} W_j(y_j)\, dy_j - \sum_{j=1}^{n} (k_j + l_j)\, \tilde{x}_j \Big\} \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

2. Formulierung der Nebenbedingungen

An den Nebenbedingungen hat sich gemäß unseren Annahmen nichts Wesentliches geändert, sie lauten deshalb für den Fall des Vorliegens von Mindest- und Höchstmengen

$$(19)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j \leq s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

und

$$(20)'\quad \tilde{x}_j \geq 0.$$

3. Hinweise auf Lösungsverfahren

Wie ein Blick auf die Form der Zielfunktion (21) unmittelbar zeigt, bestehen bezüglich der möglichen Lösungswege keine wesentlichen Änderungen zu dem bereits besprochenen Modell.

Ein besonders interessanter Gesichtspunkt ergibt sich für den Fall, daß die Nachfrage innerhalb des durch die Mindest- und Höchstgrenzen beschriebenen Spielraumes gleichverteilt ist, daß also der Absatz einer jeden Menge einer Erzeugnisart innerhalb der durch die Mindest- und Höchstwerte gegebenen Grenzen gleich wahrscheinlich ist. Die Annahme einer Gleich- (oder Rechteck-) -Verteilung ist in

vielen praktischen Situationen eine sinnvolle Approximation, insbesondere dann, wenn nicht genügend Daten aus der Vergangenheit vorhanden sind, um den Typ der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Eintritt möglicher Nachfragemengen mit ausreichender Genauigkeit zu bestimmen, wie dies insbesondere bei der Produktionsprogrammplanung oft der Fall sein kann. Der Unternehmer nimmt unter solchen Bedingungen vereinfachend etwa an, daß die Nachfrage innerhalb der von ihm für möglich gehaltenen Grenzen gleichverteilt ist.

Im allgemeinen Fall lautet die Dichtefunktion für die Rechteckverteilung, wenn b die obere und a die untere Grenze darstellen (etwa für die Produktart j),

$$\varphi_j(y_j) = \begin{cases} \frac{1}{b_j - a_j} & | \quad a_j < y_j \leq b_j \\ 0 & | \quad \text{sonst} \end{cases} \quad ^{1)}.$$

Entsprechend den von uns gewählten Bezeichnungen lautet die Dichtefunktion dann

$$\varphi_j(y_j) = \frac{1}{\beta_j - \alpha_j} = \frac{1}{\gamma_j - 0} = \frac{1}{\gamma_j} .$$

Die Annahme einer Rechteckverteilung führt nun für das hier betrachtete Problem zu einer quadratischen Programmierungsaufgabe[2)], für die zum Teil recht effiziente Algorithmen vorliegen.

---

1) Vgl. hierzu etwa A.VAZSONYI, Scientific Programming in Business and Industry, New York und London 1958 S. 302/303.

2) Zur Ableitung dieses Zusammenhangs vgl. W.PIESCH, a.a.O., S. 57 ff.

Zunächst führen ökonomische Überlegungen dazu, daß nicht der gesamte Mengenbereich von 0 bis γ_j betrachtet zu werden braucht, weil Produktartenmengen mit negativen Grenzgewinnen für das optimale Programm nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Es braucht vielmehr nur derjenige Bereich betrachtet zu werden, bis zu dem der erwartete Gewinn $\widehat{EG}$ zunimmt, d.h. nur bis zu dem Punkt, wo die erste Ableitung $\widehat{EG}'$ als notwendige (und wegen der strengen Konkavität der Zielfunktion im Falle der hier angenommenen Verteilung auch hinreichende) Bedingung für das Vorliegen eines Maximums von EG gleich Null wird. Bezeichnet man diesen Punkt (für die Produktart j) mit μ_j[1], dann ergibt sich für die Nebenbedingung (20) zunächst die Modifikation

$$(20)' \qquad \begin{aligned} \tilde{x}_j &\leq \mu_j \\ \tilde{x}_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Setzt man, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, vereinfachend für den erwarteten Gewinn pro Mengeneinheit der Erzeugnisart j

$$\frac{\widehat{EG}_j}{\tilde{x}_j} = p_j \left[\frac{1}{\tilde{x}_j} \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j)\, dy_j \right] - k_j,$$

dann ist der erwartete Gewinn $\widehat{EG}_j$ (für Produktart j) für den hier betrachteten speziellen Fall gleich

$$\widehat{EG}_j = p_j \tilde{x}_j \left[\frac{1}{\tilde{x}_j} \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j)\, dy_j \right] - k_j \tilde{x}_j.$$

Nun ist aber im Falle einer Rechteckverteilung die der Dichte $\varphi_j(y_j)$ zugehörige Verteilungsfunktion

$$\Phi_j(y_j) = \frac{y_j - \alpha_j}{\beta_j - \alpha_j},$$

---

1) Mit $\mu_j = \left(1 - \frac{k_j}{p_j}\right) \gamma_j$. Vgl. W.PIESCH, a.a.O., S. 57 und 60.

oder entsprechend den hier verwendeten Bezeichnungen

$$\Phi_j(y_j) = \frac{y_j - 0}{\gamma_j - 0} = \frac{y_j}{\gamma_j} .$$

Wegen

$$W_j(y_j) = 1 - \Phi_j(y_j)$$

ergibt sich dann

$$W_j(y_j) = 1 - \frac{y_j}{\gamma_j},$$

folglich ist

$$\frac{1}{\tilde{x}} \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j)\, dy_j = 1 - \frac{\tilde{x}_j}{2\gamma_j}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in

$$\widehat{EG}_j = p_j\tilde{x}_j \left[\frac{1}{\tilde{x}_j} \int_0^{\tilde{x}_j} W_j(y_j)\, dy_j \right] - k_j\tilde{x}_j$$

ein, dann ergibt sich

$$\widehat{EG}_j = p_j\tilde{x}_j \left(1 - \frac{\tilde{x}_j}{2\gamma_j}\right) - k_j\tilde{x}_j,$$

was sich offenbar auch als

$$\widehat{EG}_j = p_j\tilde{x}_j - \frac{p_j\tilde{x}_j^2}{2\gamma_j} - k_j\tilde{x}_j$$

oder, wenn man mit c_j den Bruttostückgewinn $(p_j - k_j)$ bezeichnet, auch als

$$\widehat{EG}_j = c_j\tilde{x}_j - \frac{p_j\tilde{x}_j^2}{2\gamma_j}$$

schreiben läßt.

Für n Produktarten läßt sich dann das Problem endgültig in folgender Weise formulieren:

$$(22) \quad \widehat{EG} = \sum_{j=1}^{n} c_j\tilde{x}_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j\tilde{x}_j^2}{2\gamma_j} \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

unter den Nebenbedingungen

$$(19) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\tilde{x}_j \leq s_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

und

$$(20)^{*} \qquad \begin{cases} \tilde{x}_j \leq \mu_j \\ \tilde{x}_j \geq 0\,. \end{cases}$$

Hiermit liegt eine quadratische Programmierungsaufgabe vor, wie sich aus einer kleinen Umformung auf die Normalform eines quadratischen Programmierungsproblems unmittelbar zeigen läßt:
Wir definieren Matrizen derart, daß sich (22) in der Form

$$\langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle \begin{pmatrix} \hat{\tilde{x}}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} - \langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n \rangle \begin{pmatrix} \frac{p_1}{2\gamma_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{p_n}{2\gamma_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\tilde{x}}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

oder

$$c'x - x'Px$$

schreiben läßt, so daß das Problem endgültig die Fassung

$$(23) \qquad \hat{EG} = c'x - x'Px \quad \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

unter Berücksichtigung von

$$(24) \qquad Ax \leq 1$$

und

$$(25) \qquad \begin{cases} x \leq \mu \\ x \geq 0 \end{cases}$$

erhält.

Zur praktischen Lösung einer solchen Programmierungsaufgabe kommen von den genannten Verfahren vor allem die Algorithmen von WOLFE und BEALE in Frage.[1] Die besondere praktische Effizienz dieser beiden Verfahren erklärt sich aus der Tatsache, daß sie beide auf Modifikationen der Simplex-Methode beruhen. Der WOLFE'sche Algorithmus hat dabei gegenüber der Methode von BEALE die für die Lösung praktischer Probleme besonders wertvolle Eigenschaft, daß die bestehenden Rechnerprogramme für die Simplex-Methode in ihren verschiedenen Formen oft nur kleiner Änderungen bedürfen, um quadratische Probleme zu lösen. Aus diesem Grunde gibt es auch gerade für den WOLFE'schen Algorithmus bereits gut ausgebaute Rechnerprogramme.

Im folgenden soll deshalb auf den Algorithmus von WOLFE als ein besonders geeignetes Verfahren zur Lösung des oben aufgezeigten Problems der Planung des Produktionsprogrammes bei Annahme einer speziellen Form der Verteilung möglicher Nachfragemengen eingegangen werden, wobei wir uns auf eine Skizzierung des generellen Lösungsweges beschränken können[3].

---

1) Grundsätzlich besteht, wie fast überall, natürlich auch hier die Möglichkeit, den quadratischen Ansatz in einen gemischt-ganzzahligen linearen überzuführen, was hier besonders einfach ist, weil die Zahl der benötigten Nebenbedingungen wegen der Eindeutigkeit des Extremwertes wesentlich reduziert werden kann. Dennoch ist insbesondere wegen der oft wesentlich schlechteren Konvergenz des GOMORY-Algorithmus gegenüber denjenigen von WOLFE und BEALE von einem solchen Vorgehen abzuraten.

2) Vgl. H.P.KÜNZI und W.KRELLE, Nichtlineare Programmierung, a.a.O. S. VIII.

3) Vgl. dazu vor allem T.L.SAATY und J.BRAM, Nonlinear Mathematics, New York-San Francisco-Toronto-London 1964, S. 132 ff.; H.P.KÜNZI, Nichtlineare Programmierung, in: Operations Research-Verfahren I (Herausg.: R.HENN), Meisenheim/Glan 1963, S. 105 ff.; P.WOLFE, The Simplex Method for Quadratic Programming, a.a.O., S. 382 ff.

Hierzu formen wir zunächst das System (24) durch die Einführung von nichtnegativen Schlupfvariablen in ein Gleichungssystem um und bezeichnen die um die Einheitsmatrix erweiterte Koeffizientenmatrix mit $\mathcal{B}$, so daß sich (24) nun in der Form

$$\mathcal{B}\varphi = 1 \tag{24)'}$$

stellt.
Anschließend definieren wir einen Zeilenvektor λ' mit m Komponenten, der die LAGRANGE'schen Multiplikatoren enthält. Die entsprechende LAGRANGE-Funktion lautet dann

$$F(\varphi,\lambda) = c'\varphi - \varphi\mathcal{P}\varphi + \lambda'(\mathcal{B}\varphi - 1). \tag{26}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit erweist es sich als zweckmäßig, für die partiellen Ableitungen der Funktion (26), d.h. $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ die Bezeichnung v_j (j=1,2,...,n) einzuführen. Faßt man diese n Komponenten zu einem Vektor ν zusammen, so gilt, wie ein Blick auf (26) unmittelbar ergibt, offensichtlich

$$\nu = c - 2\mathcal{P}\varphi + \mathcal{B}'\lambda \tag{27}$$

Gemäß dem KUHN-TUCKER-Theorem stellt nun ein Vektor φ^* nur dann eine Lösung der Aufgabe (23), (24)' und (25) dar, wenn gilt

$$c - 2\mathcal{P}\varphi^* + \mathcal{B}'\lambda^* - \nu^* = 0 \tag{28}$$

$$\mathcal{B}\varphi^* - 1 = 0 \tag{29}$$

$$\nu^{*\prime}\varphi^* = 0 \tag{30}$$

$$\varphi^* \geq 0 \tag{31}$$

und

$$\nu^* \geq 0. \tag{32}$$

Das Ziel des WOLFE'schen Algorithmus besteht nun darin, eine Lösung des Systems (28), (29), (30), (31) und (32) zu finden. Hierbei geht man von folgender Überlegung aus:
Die Bedingung (30) fordert, daß für jedes beliebige j nicht gleichzeitig $\tilde{x}_j$ und v_j einen positiven Wert annehmen dürfen. Ist aber $\mathcal{U}$ ein Vektor mit n Komponenten und hat $\mathcal{V}$ ebenfalls n Komponenten, dann dürfen maximal n Variable positiv sein, anders ausgedrückt, es müssen mindestens n Variable gleich Null werden, wenn (30) erfüllt sein soll. Eine solche Lösung ist dann, genau wie bei der linearen Programmierung, eine Basislösung.

Das Vorgehen von WOLFE zur Auffindung einer Basislösung, die der Forderung (30) genügt, besteht nun darin, durch die Einführung von zusätzlichen nichtnegativen Variablen aus (28), (29), (30), (31) und (32) ein erweitertes System zu schaffen, bei dem sich leicht eine Basislösung finden läßt, die (30) erfüllt. Genau wie bei der linearen Programmierung ist eine solche erste Basislösung dann gegeben, wenn man die (echten) Variablen, d.h. in diesem Falle $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ und λ gleich Null setzt. Auch der Übergang von einer Basislösung zur anderen erfolgt ganz analog der Simplex-Methode, weshalb hier nicht näher darauf eingegangen zu werden braucht. Die einzige Abweichung besteht darin, daß bei jeder Iteration darauf zu achten ist, daß (30) erfüllt ist.

Schon diese kurzen Ausführungen haben gezeigt, daß mit der Simplex-Methode (in ihrer Modifikation durch WOLFE) ein über den Rahmen der linearen Programmierung weit hinausgehendes wirksames Instrument vorliegt, das es gestattet, auch quadratische Programmierungsaufgaben und darüber hinaus auch allgemeinere nichtlineare Programmierungsaufgaben einer Lösung zuzuführen, weil für praktische nichtlineare Probleme oftmals eine quadratische Approximation ausreicht.

III. Die Berücksichtigung gegenseitiger Abhängigkeiten der Nachfragemengen nach den Erzeugnissen im Produktionsprogramm

1. Das gestellte Problem

In den bisher entwickelten Modellen zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage wurde davon ausgegangen, daß die Nachfragemengen nach den einzelnen Erzeugnissen im Produktionsprogramm sich nicht gegenseitig beeinflussen, eine Annahme, die nicht immer realistisch ist. Für die Planung des Produktionsprogrammes ergeben sich durch die Notwendigkeit einer Berücksichtigung gegenseitiger Abhängigkeiten der Nachfragemengen nach den Produkten im Produktionsprogramm gewisse Konsequenzen, die hier kurz aufgezeigt werden sollen.

Zunächst muß darauf hingewiesen werden, daß die generelle Interdependenz aller am Markt angebotenen Güter für die Planung des Produktionsprogrammes einer einzelnen Unternehmung nur von sekundärer Bedeutung sein kann. Diese generelle Interdependenz resultiert vor allem aus finanziellen Restriktionen der Nachfrager, die insoweit auch das Problem der Zuordnung der ihnen nur beschränkt zur Verfügung stehenden finanziellen Mittel auf die in ihren Begehrskreis fallenden Güter zu lösen haben[1]. Daß dieses Problem für die Unternehmung bei der Planung des Produktionsprogrammes nur von untergeordneter Bedeutung ist, schließt zwar nicht aus, daß man sich damit beschäftigt und unter Umständen versucht, hier-

---

1) In diesem Sinne auch G.ABROMEIT, a.a.O., S. 191f.; vgl. hierzu auch den Begriff der 'totalen Konkurrenz'(W.VERSHOFEN) und zu diesem Thema vor allem E.GUTENBERG, Der Absatz, 4. Aufl., a.a.O., S. 196.

auf Einfluß zu nehmen; primär stellen jedoch die Kaufkraft der Nachfrager und ihre Präferenzstrukturen für den Gewinnplan einer Unternehmung Daten dar.

Welcher Art können nun die nachfragemäßigen Beziehungen[1] zwischen den von einer Unternehmung hergestellten und auf dem Markt angebotenen Gütern sein? Betrachten wir beispielsweise etwa eine Unternehmung, die in der Erntezeit Agrarprodukte aufkauft, diese zu Konserven verarbeitet und die Konserven auf dem Markt anbietet. Eine solche Unternehmung wird in der Regel kaum damit rechnen können, daß die Nachfrage nach Produktart I (etwa einer bestimmten Obstkonserve) vollkommen unabhängig ist von der Nachfrage nach Produktart II (etwa einer anderen Obstkonserve) oder daß der für Produktart I erzielbare Verkaufspreis völlig unabhängig ist von der Nachfrage nach Produktart II. Sie muß vielmehr bei der Planung des Produktionsprogrammes die zwischen den Nachfragemengen nach den von ihr angebotenen Erzeugnissen bestehenden Interdependenzen beachten, wenn

---

1) In der (auf der Prämisse vollkommener Voraussicht aufbauenden) traditionellen Unternehmungstheorie wird üblicherweise zwischen 'absatzabhängigen' und 'absatzunabhängigen' Produkten unterschieden. Ganz abgesehen davon, daß die Bezeichnungen 'absatzabhängig' bzw. 'absatzunabhängig' nicht sehr glücklich sind, weil Erzeugnisse ja letztlich nicht um ihrer selbst willen, sondern zum Zwecke der marktlichen Verwertung (d.h. für den Absatz) produziert werden, sind diese Begriffe für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung unzweckmäßig, weil im Falle unvollständiger Voraussicht Absatz (d.h. die von einer Produktart tatsächlich abgesetzte Menge) und Nachfrage (d.h. die nach einer Erzeugnisart effektiv nachgefragte Menge) in der Regel nicht zusammenfallen.
Zum Begriff von 'absatzabhängigen' bzw. 'absatzunabhängigen' Erzeugnissen vgl. etwa E.SCHNEIDER, Einführung, II. Teil, a.a.O., S. 91.

sie schwerwiegende Planungsfehler vermeiden will. Insbesondere hat die Unternehmung bei der Gestaltung des Produktionsprogrammes zu berücksichtigen, ob es sich, beispielsweise bei der Aufnahme eines neuen Erzeugnisses in das Programm, um ein Produkt handelt, das um die Nachfrage nach den von der Unternehmung bereits angebotenen Erzeugnissen konkurriert (sogenannte substitutive Produkte) oder ob sich dieses neue Erzeugnis für die Nachfrage nach den anderen Produkten im Programm in dem Sinne positiv auswirkt, daß durch die Nachfrage nach der betrachteten Produktart sich gleichzeitig auch die Nachfragemengen nach den anderen Erzeugnissen und damit (cet. par.) auch deren Verkaufspreise erhöhen (sogenannte komplementäre Produkte)[1]. Während die Vorteile einer Aufnahme komplementärer Güter in das Produktionsprogramm im allgemeinen unmittelbar einleuchten - zu beachten ist insbesondere, daß Komplementärerzeugnisse in besonderem Maße geeignet sind, die werbende Wirkung des Produktionsprogrammes zu erhöhen - scheint eine Aufnahme von Substituten in das Produktionsprogramm zunächst nicht sinnvoll zu sein, da sie ex definitione um die Nachfrage nach den von der Unternehmung bereits auf dem Markt angebotenen Gütern konkurrieren, und eine Erhöhung der Nachfrage nach einem Gut offenbar nur ganz oder teilweise auf Kosten eines anderen geschehen kann.

Eine solche vordergründige Argumentation würde aber wesentliche Aspekte bei der Gestaltung industrieller Produktionsprogramme übersehen; denn auch eine Aufnahme von Substituten in ein Produktionsprogramm kann

---

1) Zur Definition von 'substitutiven' bzw. 'komplementären' Produkten vgl. etwa auch J.DEAN, Managerial Economics, New York 1951, S. 128; H.v. STACKELBERG, Grundlagen, a.a.O., S. 69 ff.

durchaus ihre Berechtigung haben, insbesondere wenn diese Substitute in der Lage sind, neue Nachfrage zu wecken und der Unternehmung zuzuführen, oder ein Eindringen von Konkurrenzunternehmungen in das von der Unternehmung angebotene Produktionsprogramm (temporär) zu verhindern[1].

Ist schon im deterministischen Fall die Planung des Produktionsprogrammes unter gleichzeitiger Berücksichtigung gegenseitiger Abhängigkeiten der Nachfragemengen nach den Erzeugnissen im Programm ein nicht immer einfach zu lösendes Problem, so gilt dies in besonderem Maße für den Fall, daß darüber hinaus noch die Nachfragemengen als Zufallsvariable angesehen werden müssen. Hier wird die Planung des Produktionsprogrammes zu einem Problem, welches, wenn das Produktionsprogramm auch nur annähernd den Anspruch erheben will, im Hinblick auf die Zielsetzung der Unternehmung optimal zu sein, wegen der bestehenden zahlreichen Interdependenzen zwischen Entscheidungsvariablen und Zustandsparametern (von höchst seltenen und rein zufälligen 'Glückstreffern' abgesehen) erst recht nicht mehr durch 'reine unternehmerische Intuition', sondern nur durch die im Rahmen der mathematischen Programmierung entwickelten Verfahren einer optimalen Lösung zugeführt werden kann. Sowohl für den mathematischen Programmierungsansatz als auch für den grundsätzlich möglichen Lösungsweg ergeben sich dabei einige Besonderheiten, die im folgenden aufgezeigt werden sollen.

---

1) Vgl. auch G.ABROMEIT, a.a.O., S. 192 ff.

2. Formulierung des Modells

Eine Unternehmung produziere n Produktarten, von deren Mengen x_j (j=1, 2, ..., n) angenommen werden soll, daß sie beliebig teilbar sind. Zur Verfügung stehen der Unternehmung m Arten von Produktionsfaktoren, deren Kapazitäten begrenzt seien; die Kostenfunktionen in Abhängigkeit von den Produktmengen seien gegeben. Die Unternehmung könne von konstanten Einstandspreisen für die Produktionsfaktoren und von LEONTIEF- Produktionsfunktionen ausgehen, der Verlauf der variablen Produktionskosten sei also linear. Außerdem sei unterstellt, daß die Unternehmung von konstanten Verkaufspreisen für ihre Produkte ausgehen kann, eine Annahme, die nicht unrealistisch ist, da in der Praxis feste Preise (etwa in Form von Listenpreisen) die Regel darstellen. Die Nachfrage y_j nach der Produktart j sei weiterhin eine stetige Zufallsvariable. Abweichend von den bisherigen Modellen werde aber nun angenommen, daß die von der Unternehmung hergestellten und auf dem Markt angebotenen Erzeugnisse nachfragemäßig miteinander verflochten sind. Diese nachfragemäßige Verflochtenheit der Produkte möge sich durch die (gemeinsame) Dichtefunktion $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ beschreiben lassen, wobei wegen der gegenseitigen Abhängigkeiten der Nachfragemengen angenommen wird, daß es sich um stochastisch abhängige Zufallsvariablen handelt. Von der Dichtefunktion wird vereinfachend unterstellt, daß sie der Unternehmung bekannt ist. Ebenfalls wird vereinfachend davon abgesehen, daß die Angebotsmengen der Produktarten sich auf die Präferenzstrukturen der Abnehmer auswirken können, d.h. es wird unterstellt, daß die Nachfragemengen nach der Produktart j sowohl unabhängig sind von den Angebotsmengen der Produktart j als auch von den Angebotsmengen der anderen von der Unternehmung angebotenen Erzeugnisse, eine Annahme, die sicherlich im praktischen Wirtschaftsleben nicht immer erfüllt sein wird. Um dieses komplexe

Problem aber vollständig in den Griff bekommen zu können, müßten dann konsequenterweise auch gleichzeitig noch die Angebotsmengen der von den Konkurrenzunternehmungen erzeugten Güter berücksichtigt werden; ein Problemkreis, dessen Analyse den Rahmen der vorliegenden Untersuchung bei weitem überschreiten würde. Die von uns gesetzte Prämisse, daß die von der Unternehmung angebotene Menge einer Produktart nicht die Präferenzstrukturen der Abnehmer verändert, ist übrigens gleichbedeutend mit der Annahme, daß für den Fall, daß die Nachfrage nach einer Produktart größer ist als die von der Unternehmung von dieser Produktart angebotene Menge, die Kunden den unbefriedigten Bedarf bei Konkurrenzunternehmungen decken.

Ziel der Unternehmung sei es nun, den Erwartungswert des Gewinnes (EG) einer Planperiode zu maximieren. Gesucht ist das im Hinblick auf diese Zielsetzung optimale Produktionsprogramm.

a. Formulierung der Zielfunktion

Bezeichnen wir - genau wie in den vorhergehenden Modellen - den Verkaufspreis für Produktart j ($j = 1, 2, \ldots, n$) mit p_j, dann sind die erwarteten Erlöse für Produktart j unter den von uns getroffenen Annahmen offenbar gleich

$$EE_j = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \int_0^{x_j} \cdots \int_0^{\infty} p_j y_j \, \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n$$

$$+ \int_0^{\infty} \cdots \int_{x_j}^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} p_j x_j \, \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n \, .$$

Die erwarteten Kosten einer Überproduktion ($x_j > y_j$) sind dann (für Erzeugnisart j)

$$EH_j = l_j \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{x_j} \cdots \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x_j - y_j)\, \varphi(y_1, y_2, \ldots y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n,$$

wobei l_j den Lagerkostensatz pro überschüssige Mengeneinheit der Produktart j bezeichnet.

Für die erwarteten Kosten einer zu geringen Produktion ($x_j < y_j$) haben wir dann entsprechend

$$EV_j = g_j \int_0^{\infty} \cdots \int_{x_j}^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (y_j - x_j)\, \varphi(y_1, y_2, \ldots y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n,$$

worin g_j wiederum den für jede nicht lieferbare Einheit der Produktart j entstehenden Goodwill-Verlust bedeutet.

Bezeichnen wir weiterhin die variablen Produktionskosten für die Erzeugnisart j mit $k_j x_j$ und mit K_F die fixen Kosten der Unternehmung in der betrachteten Planperiode, dann lautet die Zielfunktion (für n Produktarten):

$$(33)\quad EG = \Big\{ \Big[\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{x_j} \cdots \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p_j y_j \, \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} \cdots \int_{x_j}^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p_j x_j \, \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n \Big]$$

$$- \sum_{j=1}^{n} k_j x_j$$

$$- \sum_{j=1}^{n} l_j \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{x_j} \cdots \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x_j - y_j) \, \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n$$

$$- \sum_{j=1}^{n} g_j \int_0^{\infty} \cdots \int_{x_j}^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (y_j - x_j) \, \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n$$

$$- K_F \Big\} \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

Sind, wie im vorhergehenden Modell, bei der Planung des Produktionsprogrammes noch Mindest- und Höchstmengen zu beachten, dann erfährt (33) eine dementsprechende Modifikation. Bezeichnen wir mit $\tilde{x}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) wiederum die variable Produktion ($\tilde{x}_j = x_j - \alpha_j$) von Produktart j (mit α_j als der von Produktart j zu produzierenden Mindestmenge) und mit γ_j die Maximalmenge der variablen Produktion ($\gamma_j = \beta_j - \alpha_j$) von Erzeugnisart j (mit β_j als der für maximal möglich gehaltenen Nachfragemenge), dann wird (33) ohne Berücksichtigung der fixen Kosten, die als Konstante vernachlässigt werden können, zu

$$(33)'\quad \widetilde{EG} = \Big\{ \Big[\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\tilde{x}_j}\cdots\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p_j \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty}\cdots\int_{\tilde{x}_j}^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p_j \tilde{x}_j \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n \Big]$$

$$- \sum_{j=1}^{n} l_j \int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\tilde{x}_j}\cdots\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} (\tilde{x}_j - y_j) \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n$$

$$- \sum_{j=1}^{n} g_j \int_0^{\infty}\cdots\int_{\tilde{x}_j}^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} (y_j - \tilde{x}_j) \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_j \ldots dy_n$$

$$- \sum_{j=1}^{n} k_j \tilde{x}_j \Big\} \quad \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

b. Formulierung der Nebenbedingungen

Da sich durch die Berücksichtigung nachfragemäßiger Verflechtungen der Erzeugnisse im Produktionsprogramm die Nebenbedingungen nicht ändern, gelten unter den von uns getroffenen Annahmen weiterhin

$$(14)\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

und

(15) $$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

bzw.

(19) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j \leq s_i, \quad s_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j,$$

und $$i = 1, 2, \ldots, m,$$

(20)' $$\tilde{x}_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

c. Hinweise auf Lösungsverfahren

Hiermit liegt eine nichtlineare Programmierungsaufgabe vor, bei der über den tatsächlichen Verlauf der Zielfunktion ex ante nur schwer eine generelle Aussage getroffen werden kann; insbesondere kann bei einer derartigen Zielfunktion nicht von vorneherein ausgeschlossen werden, daß man bei der Lösung das globale Maximum verfehlt und nur auf ein lokales Optimum stößt. Als Lösungsverfahren kommen bei derartig strukturierten Problemen grundsätzlich vor allem die gemischt-ganzzahlige lineare und die stufenweise (dynamische) Programmierung in Frage.

Auch wenn man davon aushehen kann, daß die Unternehmung bei der Planung des Produktionsprogrammes nicht alle nachfragemäßigen Interdependenzen ihrer Erzeugnisse zu betrachten braucht, weil sich oftmals in ihren Wirkungen auf die Nachfrage verwandte Produkte zu Gruppen zusammenfassen lassen, die dann bezüglich ihrer Eigenschaften als Komplementärprodukte oder Substitute gemeinsam behandelt werden können, findet die theoretische Anwendbarkeit der gemischt-ganzzahligen linearen Programmierung bei einem derart gelagerten Problem doch sehr bald ihre praktische Gren-

ze, was insbesondere in der Vielzahl der zur Sicherung des tatsächlichen Erreichens eines globalen Maximums notwendigen Nebenbedingungen für die Hilfsvariablen begründet liegt. Das Problem scheint vielmehr seiner ganzen Struktur nach (zahlreiche Variable, relativ komplizierte nichtlineare Zielfunktion) direkt auf die stufenweise Programmierung zugeschnitten zu sein; jedoch sind auch hierbei einige grundsätzliche Gesichtspunkte zu beachten, die im folgenden aufgezeigt werden sollen.

Hierzu betrachten wir das Problem (33), (14) und (15)[1] und nehmen zunächst vereinfachend an, daß nur eine Kapazitätsbeschränkung vorliegt; (14) wird dadurch zu

$$(14)' \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b.$$

Setzen wir für (33) vereinfachend

$$(33)'' \qquad EG = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j),$$

was ohne weiteres möglich ist, und bezeichnen mit EG^* das absolute Maximum von EG, d.h.

$$(34) \qquad EG^* = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \left[\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \right],$$

dann gilt wegen

$$(35) \qquad \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \leq b - a_n x_n$$

---

1) Für (33)', (19) und (20)' gelten die Ausführungen analog.

und

$$(36)\quad EG_{n-1}(b - a_n x_n) = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}} \left[\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) \right]$$

gemäß dem BELLMAN'schen Optimalitätsprinzip offenbar

$$(37)\quad EG^* = \max_{x_n} \left[f_n(x_n) + EG_{n-1}(b - a_n x_n) \right] .$$

Nun gibt aber b nur die obere (Kapazitäts-) Grenze an, zur Berechnung von $EG_{n-1}(b - a_n x_n)$ müssen aber alle möglichen Werte von 0 bis b berücksichtigt werden, wobei es in vielen praktischen Fällen oft ausreicht, nur ganze Zahlen, also 0, 1, 2, ..., b, zu betrachten. Bezeichnen wir diesen 'Zustandsparameter' mit z, wobei gilt

$$(38)\quad 0 \leq z \leq b,$$

dann läßt sich wegen

$$(39)\quad EG_{n-1}(z) = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}} \left[\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) \right]$$

$$(40)\quad \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \leq z,$$

wenn etwa k Stufen betrachtet werden, in allgemeiner Form offenbar auch wegen

$$(41)\quad EG_k(z) = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_k} \left[\sum_{j=1}^{k} f_j(x_j) \right] ,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N)$$

und

$$(42) \quad \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \leq b, \qquad k = 1, 2, \ldots, N,$$

und

$$(43) \quad EG_k(z) = \max_{0 \leq x_k \leq \frac{b}{a_k}} \left[f_k(x_k) + EG_{k-1}(z - a_k x_k) \right]$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N)$$

das Problem der Bestimmung des optimalen Produktionsprogrammes bei stochastischer Nachfrage und nachfragemäßig verflochtenen Erzeugnissen, also (33), (14) und (15), auch als

$$(44) \quad EG_k(x_k; z) = \max_{0 \leq x_k \leq \frac{b}{a_k}} \left[f_k(x_k) + EG_{k-1}(z - a_k x_k) \right]$$

schreiben[1].

Der weitere Lösungsweg ist bekannt; wir tabellieren für alle z im Bereich von 0 bis b, errechnen die jeweils zugehörigen $EG_1(0, 1, 2, \ldots, b)$, $EG_2(0, 1, 2, \ldots, b)$, $\ldots$, $EG_N(0, 1, 2, \ldots, b)$ und $x_1(0, 1, 2, \ldots, b)$, $x_2(0, 1, 2, \ldots, b)$, $\ldots$, $x_N(0, 1, 2, \ldots, b)$, bis diejenigen $x_k^*(z)$ gefunden sind, für die $EG_k(x_k; z)$ ein Maximum wird.

Hier taucht aber bei dem von uns betrachteten Problem eine erste Schwierigkeit auf. Denn da sich über den Verlauf der Zielfunktion (33) von vorneherein keine eindeutige Aussage treffen läßt, kann auch

---

1) Vgl. vor allem G.HADLEY, Nonlinear and Dynamic Programming, a.a.O., S. 352 ff. und S. 368 ff; K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, a.a.O., S. 77 ff.; C.R.CARR und C.W.HOWE, a.a.O., S. 346 ff.; S.VAJDA, Mathematical Programming, a.a.O., S. 245/246; R.BELLMAN und ST.DREYFUS, Applied Dynamic Programming, a.a.O., S. 14 ff.

nicht die Möglichkeit ausgeschlossen werden, daß $EG_k\ (x_k;z)$ überhaupt kein eindeutiges Maximum aufweist. Für die praktische Lösung des Problems bedeutet dies aber, daß alle relativen Maxima abgesucht werden müssen, was mit einem außerordentlich hohen Rechenaufwand verbunden sein kann.

Eine weitere, noch ernstere Schwierigkeit bei der praktischen Lösung des oben aufgezeigten Problems taucht auf, wenn nicht nur eine, sondern mehrere Nebenbedingungen der Form (14) zu berücksichtigen sind.

Betrachten wir zur Kennzeichnung dieser Schwierigkeiten den einfachen Fall, daß zwei Nebenbedingungen vom Typ (14), also

$$(14)'' \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \leq b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \leq b_2 \end{cases}$$

vorliegen.
Das Problem läßt sich dann entsprechend unseren bisherigen Ausführungen als

$$(45) \quad EG_k\ (z_1,z_2) = \max_{x_1,x_2,\ldots,x_k} \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j)$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$(46) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} a_{1j}x_j \leq z_1, \\ \sum_{j=1}^{k} a_{2j}x_j \leq z_2, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \end{cases}$$

oder, wie sich in Analogie zu (43) unmittelbar ergibt, auch als

$$(47)\quad EG_k(z_1,z_2) = \max_{0 \leq x_k \leq u_k} \left[f_k(x_k) + EG_{k-1}(z_1 - a_{1k}x_k,\ z_2 - a_{2k}x_k) \right]$$

schreiben, wobei für u_k

$$(48)\quad u_k = \min\left\{ \left[\frac{z_1}{a_{1k}}\right], \left[\frac{z_2}{a_{2k}}\right] \right\}$$

gilt[1].

Die durch zwei Zustandsparameter (z_1 und z_2) verursachten Schwierigkeiten werden sofort deutlich, wenn man sich vergegenwärtigt, daß bei dem vorher dargestellten Problem mit nur einer Nebenbedingung, $EG_k(z)$ und x_k für alle möglichen Werte zwischen 0 und b berechnet und tabelliert werden mußten. Bei zwei Zustandsparametern jedoch muß, wenn man das Problem auf diese Art in den Griff bekommen will, $EG_k(z_1,z_2)$ für alle Kombinationen von z_1 und z_2 tabelliert werden, wobei z_1 den gesamten positiven Bereich von 0 bis b_1 und z_2 den gesamten positiven Bereich von 0 bis b_2 durchlaufen können, was bei Problemen mit zahlreichen Nebenbedingungen mit einem außerordentlich hohen Rechenaufwand verbunden sein kann[2].

Eine ganz wesentliche Herabsetzung der Anzahl der notwendigen Rechenoperationen kann dann erreicht

---

1) Vgl. G.HADLEY, Nonlinear and Dynamic Programming, a.a.O., S. 424.

2) Vgl. auch R.BELLMAN und ST.DREYFUS, Applied Dynamic Programming, a.a.O., S. 322.

werden, wenn die zweite Nebenbedingung effizient ist, also nicht eine Ungleichung, sondern eine Gleichung darstellt. Das Problem stellt sich dann im Falle zweier Nebenbedingungen in der allgemeinen Form

$$(49) \quad EG = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) - \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j - b_2\right) \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

unter Berücksichtigung von

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \leq b_1$$

und

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2, \ldots, n,$$

wodurch die Anzahl der Nebenbedingungen wieder auf eine einzige herabgesetzt worden ist[1].

Leider ist die Möglichkeit der Verwendung der LAGRANGE'schen Multiplikatoren zur Lösung von Problemen im Bereich der Produktionsprogrammplanung begrenzt; eine wesentliche Verringerung der Anzahl der notwendigen Rechenoperationen ist also hierdurch nicht zu erwarten. Denn einmal wird es nicht immer einfach sein, ex ante genau festzustellen, welche Nebenbedingung effizient ist, was sich gewöhnlich erst als Ergebnis der Rechnung herausstellt, und zum anderen hat man es bei Produktionsprogrammplanungsproblemen in der Regel mit wesentlich mehr als zwei oder drei Nebenbedingungen des Typs (14) zu tun, und eine Verringerung der Anzahl der Zustandsparameter um einige we-

---

1) Zu Einzelheiten bezüglich der Möglichkeit, die Dimension eines Problems durch die Verwendung LAGRANGE'scher Multiplikatoren zu reduzieren, vgl. vor allem R.BELLMAN und ST.DREYFUS, Applied Dynamic Programming, a.a.O., S. 52 ff.

nige fällt bei Problemen mit zahlreichen Nebenbedingungen praktisch kaum ins Gewicht.

3. Interpretation der Modellergebnisse

Wir haben zu zeigen versucht, wie das Problem der Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage unter gleichzeitiger Berücksichtigung nachfragemäßiger Interdependenzen zwischen den von der Unternehmung hergestellten und angebotenen Erzeugnissen in einen nichtlinearen Programmierungsansatz überführt werden kann, und aufgezeigt, welche Schwierigkeiten zu überwinden sind, wenn dieses komplexe Problem auch einer praktischen Lösung zugeführt werden soll.

In den bisherigen Modellen wurde davon ausgegangen, daß Anpassungsprozesse der Unternehmung nicht möglich seien, eine Annahme, die der Realität im praktischen Wirtschaftsleben nicht immer entspricht. Eine Untersuchung, die sich die Aufgabe gestellt hat, auch 'operationally meaningful' zu sein, muß versuchen, auch diesem Gesichtspunkt Rechnung zu tragen, und so soll im folgenden gezeigt werden, welche Aspekte sich für die Planung des Produktionsprogrammes bei stochastischer Nachfrage ergeben, wenn Anpassungsprozesse der Unternehmung zugelassen werden.

IV. Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage unter Beachtung von Anpassungsmöglichkeiten der Unternehmung

Zur Untersuchung dieses Problems soll zuvor kurz aufgezeigt werden, welche typischen Möglichkeiten einer Anpassung an unterschiedliche Beschäftigungsverhältnisse bestehen[1].

1. Arten von Anpassungsprozessen

(a) Intensitätsmäßige Anpassung

Bezeichnet man die Produktmenge einer Planperiode mit x, die Menge der in einer Unternehmung vorhandenen Produktionsfaktoren mit M, die Intensität der Nutzung der an der Durchführung des Produktionsprozesses beteiligten Faktoren mit l und die Nutzungszeit der einzelnen technischen Einheiten mit t, dann läßt sich unter vereinfachten Bedingungen der Zusammenhang zwischen der Produktmenge einer Planperiode und der sie bestimmenden Faktoren durch

(50) $x = M \cdot l \cdot t$

wiedergeben.

Intensitätsmäßige Anpassung liegt nur dann vor, wenn bei Konstanz der Menge der vorhandenen Produktionsfaktoren ($\bar{M}$) und Konstanz der Betriebszeit ($\bar{t}$), d.h. der Zeit, in der produziert wird, die Intensität der Nutzung des menschlichen und maschinellen Leistungspotentials variiert wird[2].

---

1) Vgl. hierzu vor allem E.GUTENBERG, Einführung, 1. Band: Die Produktion, 10. Aufl., a.a.O., S. 342 ff.

2) Vgl. zu diesem Problemkreis vor allem L.PACK, Die Bestimmung der optimalen Leistungsintensität, in: Z.f.d.ges.Staatsw. (119) 1963, S. 1 ff.; auch E.HEINEN, Anpassungsprozesse und ihre kostenmäßigen Konsequenzen, Köln und Opladen 1957.

(b) Zeitliche Anpassung

Von zeitlicher Anpassung spricht man dann, wenn bei Konstanz der Menge der eingesetzten Potentialfaktoren ($\bar{M}$) und Konstanz der Nutzungsintensität ($\bar{I}$) die Betriebszeit variiert wird.

(c) Quantitative Anpassung

Wird bei Konstanz der Nutzungsintensität ($\bar{I}$) und Konstanz der Betriebszeit ($\bar{t}$) die Zahl der zur Durchführung des Prozesses der Leistungserstellung eingesetzten Produktiveinheiten variiert, was selbstverständlich eine gewisse Teilbarkeit der Faktoren voraussetzt, dann liegt quantitative Anpassung vor. Bei der quantitativen Anpassung lassen sich grundsätzlich zwei Fälle unterscheiden: Einmal werden (etwa bei rückläufiger Beschäftigung) die stillgelegten Aggregate verkauft bzw. es werden Arbeiter entlassen (Fall A) oder es werden die stillgelegten Produktiveinheiten nicht abgestoßen, sondern in Bereitschaft gehalten, also etwa Arbeiter nicht entlassen, sondern auf eine andere Weise beschäftigt (Fall B). Mit dem Fall A brauchen wir uns hier nicht weiter zu beschäftigen, da wir gemäß den bereits aufgezeigten generellen Prämissen der Untersuchung von einem gegebenen Betrieb mit gegebener Kapazität ausgehen, der Fall A aber, wie man unmittelbar einsieht, die Kapazität des Betriebes verändert und somit eine Variation der Betriebsgröße darstellt[1].

---

1) Vgl. E.HEINEN, Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, Band I: Grundlagen, Wiesbaden 1959, S. 194; auch E.HEINEN, Anpassungsprozesse im Kokereibetrieb unter besonderer Berücksichtigung der quantitativen und intensitätsmäßigen Anpassung, in: ZfhF (7) 1955, S. 106 ff., wo u.a. gezeigt wird, daß die zeitliche Anpassung nur einen Spezialfall der quantitativen Anpassung darstellt.

Selbstverständlich ist auch, wenn die technischen Produktionsbedingungen es zulassen, eine Kombination von intensitätsmäßiger, zeitlicher und quantitativer Anpassung möglich, was vor allem in mechanisch-technologischen Industrien der Fall sein wird; bei chemisch-technologischer Fertigung (wie z.B. in der chemischen oder in der eisenschaffenden Industrie) scheiden vielfach eine zeitliche und, insbesondere wegen der oft außerordentlich hohen Wiederinbetriebnahmekosten, meist auch eine quantitative Anpassung aus.

2. Die Notwendigkeit einer Berücksichtigung von Anpassungsmöglichkeiten im Rahmen der Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage

Maßgeblich für die Wahl einer bestimmten Anpassungsform oder einer Kombination von ihnen sind zunächst die technischen Bedingungen des Produktionsprozesses, wodurch oftmals gewisse Anpassungsformen von vorneherein ausgeschlossen werden können. Lassen die technischen Eigenheiten der Produktion aber Anpassungsprozesse zu, dann sind für die Wahl einer Anpassungsform oder einer Kombination von Anpassungsformen allein ökonomische Gesichtspunkte entscheidend, und zwar wird man (im deterministischen Fall) diejenige Anpassungsart bzw. diejenige Kombination von Anpassungsarten wählen, bei welcher der Gewinn als positive Differenz zwischen Erlösen und Kosten einer Wirtschaftsperiode ein Maximum wird.

Kostentheoretisch bedeutet die Möglichkeit einer Unternehmung, sich an wechselnde Beschäftigung auf unterschiedliche Weise anpassen zu können, daß die Unternehmung gegenüber der auf der (praktisch unrealistischen) Prämisse der Momentanproduktion aufbauenden traditionellen Kostentheorie, bei der die Anzahl der pro Zeiteinheit hergestellten Mengenein-

heiten einer Produktart die einzige Entscheidungsvariable ist, zusätzliche Aktionsparameter erhält[1]. Da den unterschiedlichen Möglichkeiten einer Anpassung aber in der Regel unterschiedliche Produktionskosten zugeordnet sind, folgt daraus notwendigerweise, daß die 'Verhaltensweise' der Unternehmung für die Höhe der Produktionskosten von entscheidender Relevanz ist[2]. Für die Produktionsprogrammplanung in Mehrproduktunternehmungen, insbesondere bei alternativer Produktion, wo sowieso schon eine ex-ante-Angabe des Engpasses nicht möglich ist, hat dies aber zur Konsequenz, daß eine im Hinblick auf die angestrebte Zielsetzung optimale Planung des Produktionsprogrammes ohne Berücksichtigung der einer Unternehmung offenstehenden Anpassungsprozesse gar nicht möglich ist; denn einmal kann es durchaus von der Art und Menge der im Produktionsprogramm vorhandenen Produktarten abhängen, welcher Anpassungsprozeß der optimale ist, und zum anderen bestimmen die Produktionskosten, deren Höhe ihrerseits wiederum von der gewählten Anpassungsform bzw. Kombination von Anpassungsformen abhängt, die Zusammensetzung des Produktionsprogrammes[3]. Werden die einer Unternehmung im Rahmen der technischen Bedingungen des Produktionsprozesses möglichen Anpassungsformen nicht berücksichtigt, so wird dies in aller Regel zu schwerwiegenden Planungsfehlern führen.

---

1) Vgl. L.PACK, Die Bestimmung der optimalen Leistungsintensität, a.a.O., S. 8.

2) Vgl. auch E.HEINEN, Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, a.a.O., S. 202.

3) Vgl. auch H.ALBACH, Produktionsplanung auf der Grundlage technischer Verbrauchsfunktionen, a.a.O., S. 61.

Dies gilt umso mehr für die Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage, wo also die Nachfrage nach den von einer Unternehmung angebotenen Erzeugnissen nicht genau bekannt ist, sondern einer Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt. Zwar braucht in praktischen Situationen oftmals nicht der gesamte positive Bereich betrachtet zu werden, sondern nur ein von der Unternehmung für möglich gehaltener Spielraum, etwa für die Produktart I zwischen 800 und 1000 Mengeneinheiten, für die Produktart II zwischen 300 und 500 Mengeneinheiten, für die Produktart III zwischen 1200 und 1500 Mengeneinheiten usw.. Gemäß dem Charakter einer Zufallsverteilung kann dabei aber niemals ausgeschlossen werden, daß beispielsweise für die Produktart I eine Nachfragemenge in Höhe von 810 oder 820 oder gar 990 Einheiten auftritt, auch wenn etwa eine Nachfrage von 990 Mengeneinheiten für sehr viel weniger wahrscheinlich gehalten wird als etwa eine solche von 900 Mengeneinheiten. Auch hier muß die Unternehmung bei der Planung des Produktionsprogrammes zwischen Produktionskosten und den erwarteten Kosten einer Unter- und einer Überproduktion abwägen; der wesentliche Unterschied zu den bisher betrachteten Fällen, wo keine Anpassungsprozesse zugelassen waren, besteht nun aber darin, daß über die Höhe der Produktionskosten solange noch keine eindeutige Aussage getroffen werden kann, wie nicht über die Wahl einer Anpassungsform oder einer Kombination von Anpassungsformen entschieden worden ist. Das bedeutet aber, daß bei der Bestimmung des Produktionsprogrammes die sich auf Grund der für die Nachfrage nach einer bestimmten Produktart geltenden speziellen Wahrscheinlichkeitsverteilung ergebenden erwarteten Kosten einer Überproduktion und einer zu geringen Produktion berücksichtigt werden müssen. Weiterhin hat die Unternehmung gleichzeitig eine Entscheidung darüber zu treffen, welche Anpassungs-

form bzw. welche Kombination von Anpassungsformen bei der Erstellung einer bestimmten Menge einer Produktart zu wählen ist, wobei bei alternativer Produktion gleichzeitig auch den Erfordernissen der anderen die beschränkt verfügbaren Faktoren nutzenden Produktarten Rechnung zu tragen ist.

Welche grundsätzlichen Möglichkeiten bestehen, dieses komplexe kombinatorische Problem in den Griff zu bekommen und, wenn möglich, einer Lösung zuzuführen, soll im folgenden aufgezeigt werden.

3. Mögliche Arten des Vorgehens zur Berücksichtigung von Anpassungsprozessen bei der Planung des Produktionsprogrammes im Falle stochastischer Nachfrage

(a) Sukzessive Planung von Produktionsprogramm und Anpassungsprozessen

Eine erste grundsätzliche Möglichkeit zur Behandlung des Problems der Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage, wenn Anpassungsprozesse möglich sind, besteht darin, bei der Planung des Produktionsprogrammes auf die für möglich gehaltenen Höchstmengen abzustellen, was gleichbedeutend mit der Annahme ist, daß die Kosten einer zu geringen Produktion für derart hoch angesehen werden, daß eine unbedingte Befriedigung jeder möglichen Nachfrage nach den von der Unternehmung angebotenen Gütern für unbedingt notwendig gehalten wird[1]. Die Unternehmung entscheidet dann, von jeder Produktart die für maximal absetzbar gehaltene Höchstmenge zu produzieren, und löst anschließend das Problem der Bestimmung einer im Hinblick auf eine

---

1) Ein solches Problem behandelt etwa K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, a.a.O., S. 141 ff.

stückkostenminimale Fertigung dieser für sie nun vorgegebenen Produktartenmengen optimalen Anpassungsart bzw. Kombination von Anpassungsarten[1].

Eine solche Art des Vorgehens ist zwar grundsätzlich möglich, dem eigentlichen Problem wird hierdurch jedoch in keiner Weise Rechnung getragen; denn eine solche Konzeption stellt nichts anderes dar als die Lösung eines stochastischen Problems durch Überführung in ein deterministisches; die eigentlichen sich bei der Programmplanung bei stochastischer Nachfrage und möglichen Anpassungsprozessen ergebenden Fragen werden hierdurch eliminiert.

Das gilt in gleichem Maße für eine weitere mögliche Art des Vorgehens, die darin besteht, daß man für jede Erzeugnisart jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen 'Nachfrage' mit der diesem entsprechenden Wahrscheinlichkeit multipliziert und die so erhaltenen mathematischen Produkte addiert, anders ausgedrückt, für jede Erzeugnisart den Mittelwert ermittelt, bei der Planung des Produktionsprogrammes hierauf abstellt und anschließend plant, wie diese den Mittelwerten entsprechenden Produktartenmengen konstenminimal hergestellt werden können. Gegen eine solche Konzeption erheben sich darüber hinaus noch Bedenken, die vor allem aus der häufigen Unzulänglichkeit des Mittelwertes zur Charakterisierung einer Zufallsvariablen, wie sie in unserem Falle

---

1) Bei Parallelproduktion und im Falle abundanter Faktoren kann das von L.PACK entwickelte Verfahren zur Bestimmung optimaler Anpassungsprozeßkombinationen (vgl. L.PACK, Die Elastizität der Kosten, a.a.O., S. 281 ff.; auch L.PACK, Die Ermittlung der kostenminimalen Anpassungsprozeßkombination - ein Anwendungsbeispiel der Dynamischen Programmierung, in: ZfbF (18) 1966, S. 466 ff.) unmittelbar angewandt werden; bei Alternativproduktion müßte es entsprechend modifiziert werden.

die Nachfrage darstellt, resultieren, worauf aber in diesem Rahmen nicht näher eingegangen zu werden braucht[1].

Die Schwächen der bisher aufgezeigten Konzeptionen legen die Vermutung nahe, daß durch einen Kompromiß zwischen diesen beiden extremen Arten des Vorgehens einer Lösung des Problems der Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage unter Berücksichtigung möglicher Anpassungsprozesse einer Unternehmung näherzukommen ist.

Hierzu betrachten wir den einfachsten Fall einer Mehrproduktunternehmung, d.h. eine Unternehmung, die nur zwei Produkte herstellt und auf dem Markt anbietet. Weiterhin soll vereinfachend für die Nachfrage nach den beiden Produkten eine Wahrscheinlichkeitsverteilung angenommen werden, die ausführlich tabelliert ist, und zwar möge die Unternehmung auf Grund von Aufzeichnungen aus der Vergangenheit und Marktbeobachtungen die Nachfrage pro Planperiode (vereinfachend etwa pro Tag) nach den beiden von ihr hergestellten Erzeugnissen als normalverteilt ansehen, d.h. für die Dichtefunktion gilt

$$(50) \qquad \varphi_j(y_j) = \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_j - \bar{m}_j)^2}{2\sigma_j^2}}, \quad j = 1, 2,$$

worin wiederum $\bar{m}_j$ den Mittelwert und σ_j die Standardabweichung (für die Produktart j) bezeichnen. Die Dichtefunktion der Nachfrage nach Produktart I, also $\varphi_1(y_1)$, sei durch einen Mittelwert ($\bar{m}_1$) von 900 und eine Standardabweichung (σ_1) von 30 charakterisiert, während für $\varphi_2(y_2)$ ein Mittelwert ($\bar{m}_2$) von 1600 und eine Standardabweichung (σ_2) von 40

1) Vgl. hierzu etwa B.GNEDENKO und A.J. CHINTSCHIN, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. Aufl., Berlin 1961, S. 88 ff.

gelten mögen. Eine unbedingte Belieferung der Nachfrage wird von der Unternehmung nicht als notwendig angesehen, jedoch werden die im Falle einer zu geringen Produktion auftretenden Goodwill-Verluste für derart erheblich angesehen, daß der Fall einer zu geringen Produktion maximal einmal (bei Produktart I) und höchstens zweimal (bei Produktart II) im Monat auftreten darf. Unter der Annahme stationärer Verhältnisse ist diese Forderung der Unternehmung äquivalent dem Zulassen eines Falles von Unterproduktion in 25 Planperioden (Arbeitstage pro Monat) für Produktart I bzw. einem maximal zweimaligen Auftreten einer zu geringen Produktion von Produktart II. Bei der Bestimmung des Produktionsprogrammes könnte nun bei der von uns angenommenen Art der Verteilung der Nachfrage nach den beiden Erzeugnisarten in folgender Weise vorgegangen werden:

Für die Wahrscheinlichkeit eines Auftretens von Unterproduktion gilt offenbar

$$(51) \quad \Pr(y_j \geq x_j) = 1 - \Phi_j(y_j), \quad j = 1, 2,$$

worin $\Phi_j(y_j)$ die Verteilungsfunktion (für Produktart j) bezeichnet, was unter den von uns getroffenen Annahmen für Produktart I

$$(52) \quad 1 - \Phi_1(y_1) = \frac{1}{25} = 0{,}04$$

und für Produktart II

$$(53) \quad 1 - \Phi_2(y_2) = \frac{2}{25} = 0{,}08$$

ergibt.

Trifft man nun einen Kompromiß zwischen den bereits dargestellten Arten des Vorgehens dergestalt, daß weder ausschließlich auf den Mittelwert $\bar{m}_j$ abgestellt wird noch eine unbedingte Befriedigung der Nachfrage

gewährleistet sein soll, dann lassen sich (etwa im Falle einer Normalverteilung) die zu bestimmenden Produktmengen x_j (j = 1, 2) darstellen als die Summe aus dem Mittelwert und der mit einem konstanten Parameter multiplizierten Standardabweichung, also

$$(54) \quad x_j = \bar{m}_j + \varepsilon_j \sigma_j.$$

Über die standardisierten Werte von $\Phi_j(y_j)$, d.h.

$$(55) \quad \Phi_j(y_j) = \hat{\Phi}_j(\hat{y}_j)$$

mit

$$(56) \quad \hat{y}_j = \frac{y_j - \bar{m}_j}{\sigma_j}$$

ergibt sich wegen

$$(57) \quad 1 - \hat{\Phi}_1(\hat{y}_1) = 0{,}96$$

und

$$(58) \quad 1 - \hat{\Phi}_2(\hat{y}_2) = 0{,}92$$

für ε_j (j = 1, 2), wie man aus den Tabellen für die Normalverteilung unmittelbar abliest[1)]

$$(59) \quad \varepsilon_1 = 1{,}76$$

und

$$(60) \quad \varepsilon_2 = 1{,}41.$$

Wegen (54) folgt dann für x_1

$$(61) \quad x_1 = 900 + 1{,}76 \cdot 30 = 952{,}8 \ [\text{ME}]$$

und für x_2

$$(62) \quad x_2 = 1600 + 1{,}41 \cdot 40 = 1656{,}4 \ [\text{ME}]$$

---

1) Vgl. hierzu auch A.VAZSONYI, Scientific Programming in Business and Industry, a.a.O., S. 298 ff. und 330 ff.; R.ST.BURINGTON und C.C.MAY, Jr., Handbook of Probability and Statistics with Tables, 2. Aufl., Sandusky, O. 1958, insbes. S. 89 und S. 267 ff.

Auf Grund der angenommenen Art der Verteilung und des Verhaltens der Unternehmung bezüglich des Zulassens von Unterproduktion wären also (aufgerundet) von Produktart I 953 und von Produktart II 1657 Mengeneinheiten zu erstellen, wonach dann anschließend noch die produktionskostenminimale Anpassungsart bzw. Kombination von Anpassungsprozessen zur Herstellung dieses Produktionsprogrammes bestimmt werden müßte.

Durch eine solche Konzeption werden zwar die aufgezeigten Nachteile der anderen beiden extremen Arten des Vorgehens vermieden, eine wirkliche Lösung des Problems der Bestimmung des optimalen Produktionsprogrammes bei stochastischer Nachfrage unter gleichzeitiger Berücksichtigung der einer Unternehmung offenstehenden Anpassungsprozesse wird jedoch auch hierdurch nicht erreicht, so plausibel diese mögliche Art des Vorgehens auf den ersten Blick auch erscheinen mag. Denn durch die Forderung der Unternehmung, nur eine ganz bestimmte Anzahl von Fällen des Auftretens unbefriedigter Nachfrage nach den von ihr hergestellten und angebotenen Erzeugnissen zuzulassen, werden gerade die wesentlichsten bei der Programmplanung bei stochastischer Nachfrage anzustellenden Überlegungen von vorneherein aus der Betrachtung ausgeschlossen. Dies zeigt sich besonders deutlich daran, daß die Bestimmung der zu produzierenden Produktartenmengen unter vollkommener Vernachlässigung von Erlösen und Kostengesichtspunkten (z.B. erwartete Kosten der Über- und Unterproduktion, Produktions- und Lagerkosten) erfolgt. Man könnte nun die Auffassung vertreten, daß gerade durch diese Art des Vorgehens das immer recht schwierig zu lösende Problem einer ex-ante-Bestimmung der erwarteten Kosten einer Unterproduktion (insbesondere also der Goodwill-Verluste usw.) entfällt. Dies ist aber

nicht der Fall; denn ein Unternehmer, der als rational handelnd konzipiert wird, und hiervon muß in einer ökonomischen Analyse immer ausgegangen werden, ist gar nicht in der Lage, anzugeben, wie oft er das Auftreten unbefriedigter Nachfrage nach einer bestimmten Produktart zulasen will, ohne irgendeine Vorstellung von den kostenmäßigen Konsequenzen einer solchen Entscheidung zu haben. Es ist also nicht so, daß durch die oben aufgezeigte Konzeption des Zulassens einer bestimmten Anzahl von Fällen unbefriedigter Nachfrage das Problem einer Bestimmung der Kosten einer zu geringen Produktion umgangen werden könnte, sie setzt vielmehr genauso eine Quantifizierung der monetären Konsequenzen einer Unterproduktion voraus wie bei den bisher entwickelten simultanen Ansätzen zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage. Wenn dies aber der Fall ist, dann ist nicht einzusehen, warum die erwarteten Kosten einer Unterproduktion nicht direkt explizit in die Zielfunktion aufzunehmen sind, was außerdem den Vorteil hat, daß sie gleichzeitig den Produktionskosten und den Kosten einer Überproduktion gegenübergestellt werden können, Kostengrößen, die bei dieser Art der sukzessiven Planung nicht den geringsten Einfluß auf das Produktionsprogramm ausüben. Denn die erwarteten Kosten einer Überproduktion (insbesondere Lagerkosten) werden gar nicht berücksichtigt, und über die Produktionskosten wird durch die Wahl einer bestimmten Anpassungsart bzw. Kombination von Anpassungsarten erst im Anschluß an die Festlegung des Produktionsprogrammes entschieden. Es wird also letztlich nicht das Problem der Produktionsprogrammplanung in marktorientierten Unternehmungen gelöst, sondern das Problem einer stückkostenminimalen Erzeugung fest vorgegebener Produktartenmengen, wobei allerdings bei der Bestimmung der herzustellenden Produktartenmengen über die Berücksichtigung von Nachfrageverteilungen

stochastische Elemente in die Überlegungen eingehen; der Unterschied zu der den Verhältnissen in marktorientierten Unternehmungen entgegengerichteten Auftragsproduktion ist aber bei dieser Art des sukzessiven Vorgehens nur noch ein gradueller.

Zeigt sich schon aus diesen wenigen Andeutungen, daß ein sukzessives Vorgehen, wie dies die oben aufgezeigte Konzeption darstellt, dem eigentlichen Problem nicht gerecht wird, so wird dies noch deutlicher, wenn man der Tatsache Rechnung trägt, daß die Bestimmung des Produktionsprogrammes allein auf Grund der durch die Art der Verteilung charakterisierten Nachfrageverhältnisse und ohne Berücksichtigung vorhandener Kapazitätsrestriktionen erfolgte. Aber auch wenn sich das Produktionsprogramm produktionstechnisch im Rahmen der vorhandenen Kapazitäten durchführen lassen sollte, werden durch diese oben aufgezeigte Art des sukzessiven Vorgehens weitere Gesichtspunkte eliminiert, die gerade im Falle möglicher Anpassungsprozesse relevant werden, und die bei der Planung des Produktionsprogrammes, wenn dieses den Anspruch erheben will, im Hinblick auf die Zielsetzung der Unternehmung optimal zu sein, in den Kalkül einbezogen werden müssen. Denn in Unternehmungen, welche die Möglichkeit haben, sich anzupassen, sind die Kapazitätsgrenzen nicht mehr so eindeutig vorgegeben, wie dies in den bisher entwickelten Modellen der Fall war, sie sind vielmehr auf Grund verschiedener Anpassungsmöglichkeiten dispositionsbestimmt und demnach innerhalb eines bestimmten Bereiches variabel. Auch wenn man, wie es im Falle von Anpassungsmöglichkeiten einer Unternehmung als zweckmäßig erscheint, bei den Kapazitätsrestriktionen auf die Maximalkapazität, d.h. die maximal mögliche Ausbringungsmenge pro Planperiode unter Beachtung aller der Unternehmung zur Verfügung stehenden Anpassungsformen, abstellt und annimmt, daß das ausschließlich auf Grund der Forderung der Unternehmung nach einer ganz bestimmten Anzahl von Fällen unbefriedigter Nachfrage geplante Produktionsprogramm

innerhalb dieser Maximalkapazität produktionsmäßig durchführbar ist, kann durchaus der Fall eintreten, daß sich die auf Grund dieses Kriteriums festgelegte Produktartenmengenkombination, etwa bei möglicher quantitativer Anpassung, nur durch den Einsatz zusätzlicher Produktiveinheiten fertigen läßt, was sich insbesondere bei hohen Inbetriebnahmekosten unter Umständen kostenmäßig sehr ungünstig auswirken kann. Es kann sogar für die Unternehmung notwendig werden, sich zur Herstellung des auf diese Weise bestimmten Produktionsprogrammes sowohl intensitätsmäßig bis zur maximalen Nutzungsintensität als auch zeitlich bis zu der ihr maximal zur Verfügung stehenden Leistungszeit anzupassen und auch alle verfügbaren Aggregate einzusetzen, was zu kostenmäßigen Konsequenzen führen kann (und in der Regel auch wird), welche die Bedeutung einer dem oben aufgezeigten Konzept folgenden sukzessiven Planung mehr als fragwürdig erscheinen lassen und eine Abkehr von dieser zunächst recht plausibel erscheinenden Art des Vorgehens geradezu erzwingen, wenn die Unternehmung dauernde Planrevisionen vermeiden will.

Es kann nicht im Sinne eines rational handelnden Unternehmers liegen, ohne Berücksichtigung seines eigenen Interesses, d.h. der Maximierung des Erwartungswertes seines Nutzens oder, was bei Proportionalität von Nutzen und Gewinn gleichbedeutend ist, des Erwartungswertes des Gewinnes, eine unbedingte Befriedigung der Nachfrage zu gewährleisten oder nur eine ganz bestimmte Anzahl des Auftretens unbefriedigter Nachfrage nach den von der Unternehmung hergestellten und auf dem Markt angebotenen Gütern zu fordern. Deshalb erscheint das Zulassen des soeben aufgezeigten ungünstigsten Falles nur dann sinnvoll, wenn die durch eine Erhöhung der Intensität der Aggregate, das Einlegen von Überstunden und den Einsatz zusätzlicher Produktiveinheiten verursachte Erhöhung der Produktionskosten einer Produktart niedriger ist als dieje-

nigen Kosten, die dadurch hervorgerufen werden, daß etwa für eine bestimmte Produktart ein weiterer Fall unbefriedigter Nachfrage zugelassen wird. Anders ausgedrückt: Es müssen in einem Modellansatz sowohl die erwarteten Kosten einer Über- wie auch einer Unterproduktion gleichzeitig mit den der Realisierung einer bestimmten Anpassungsform bzw. Kombination von Anpassungsformen zugeordneten Produktionskosten einer Erzeugnisart explizit in die Zielfunktion aufgenommen werden, was nur in einem simultanen Ansatz unter zusätzlicher Berücksichtigung der einer Unternehmung beschränkt zur Verfügung stehenden Produktionsfaktoren geschehen kann. Ob und inwieweit dies möglich ist, soll im folgenden untersucht werden.

(b) Simultane Planung von Produktionsprogramm und Anpassungsprozessen

(b_1) Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage und intensitätsmäßiger Anpassung

In den bisher entwickelten Modellen zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage wurde von einem Spezialfall limitationaler Produktionsfunktionen ausgegangen, und zwar von linear-limitationalen (LEONTIEF-) Produktionsfunktionen. Wegen der dabei unterstellten Proportionalität zwischen dem mengenmäßigen Einsatz an Produktionsfaktoren und dem mengenmäßigen Ergebnis des Faktoreinsatzes waren hierbei (bei artmäßiger und qualitativer Konstanz der Produktionsfaktoren) die Produktionskoeffizienten notwendigerweise konstant. Allgemein können jedoch die Produktionskoeffizienten in bezug auf alternative Produktmengen nur dann als konstant behandelt werden, wenn diese Produktmengen auf Grund eines fest vorgegebenen Produktionsverfahrens mit konstanter Leistungsintensität hergestellt werden . Hebt man diese insbesondere bei mechanisch-technologischer

Fertigung nicht immer realistische Annahme[1] auf und läßt die Möglichkeit einer intensitätsmäßigen Anpassung zu, dann ergeben sich für den Programmierungsansatz zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage in Mehrproduktunternehmungen gewisse Modifikationen, die hier kurz dargestellt werden sollen.

Hierzu betrachten wir eine Unternehmung, die n Produktarten herstellt und auf dem Markt anbietet. Bei den Produkten möge es sich etwa um Wellen unterschiedlicher Qualität (unterschiedliche Legierungen) handeln, die zu ihrer Herstellung m Produktionsfaktoren benötigen. So müssen etwa die Rohlinge zunächst geputzt werden, die überdrehten Wellen werden anschließend noch gebohrt, geschliffen, poliert usw. Hierbei mögen der Unternehmung jeweils gleichartige Aggregate zur Verfügung stehen, also etwa Drehbänke gleicher Qualität (z.B. ausschließlich Revolverdrehbänke) oder auch gleichartige Bohrmaschinen. Diese Aggregate mögen mit unterschiedlicher Intensität genutzt werden können; so habe die Unternehmung etwa bei den Drehbänken die Wahl zwischen drei Kombinationen von Vorschub und Spantiefe, denen jeweils eine bestimmte Schnittgeschwindigkeit zugeordnet ist. Zeitliche und quantitative Anpassung seien ausgeschlossen.

Folgt man nun dem Vorschlag H.ALBACH's[2], ein Produkt der Art j, das mit einer bestimmten Intensität (etwa Schnittgeschwindigkeit) hergestellt wird, als von einem Produkt der Art j, das auf dem gleichen Aggregat mit einer anderen Intensität (z.B. einer höheren Schnitt-

---

1) Auf eine weitere notwendige Bedingung für die Konstanz von Produktionskoeffizienten, daß nämlich auch die Leistungszeit keinen Einfluß auf den Produktionsfaktorartenverbrauch ausüben darf, hat vor allem L.PACK hingewiesen. Vgl. L.PACK, Die Bestimmung der optimalen Leistungsintensität, a.a.O., S. 9 ff.

2) Vgl. H.ALBACH, Produktionsplanung auf der Grundlage technischer Verbrauchsfunktionen, a.a.O., S.63 ff.

geschwindigkeit) produziert wird, als verschieden zu behandeln , dann läßt sich das Problem der Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage und intensitätsmäßiger Anpassung (bei 'absatzunabhängigen' Erzeugnissen und ohne Berücksichtigung von Mindest- und Höchstabsatzmengen) wie folgt formulieren:[1)]

$$(63)\quad EG = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{m}_j - \sum_{j=1}^{n} l_j (x_j - \bar{m}_j) - \sum_{j=1}^{n} (p_j + g_j + l_j) \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\, \varphi_j(y_j)\, dy_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{w} k_{jr} x_{jr} - K_F \Big\} \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$(64)\quad \left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{w} a_{ijr} x_{jr} &\leq b_i, \\ x_j - \sum_{r=1}^{w} x_{jr} &= 0, \\ \sum_{r=1}^{w} u_{jr} &\leq 1, \\ x_{jr} &\leq u_{jr} h_{jr}, \end{aligned}\right\}$$

und

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} u_{jr} &\geq 0, \\ x_{jr} &\geq 0, \\ u_{jr} &\quad \text{ganzzahlig!} \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} &(\, i = 1, 2, \ldots, m, \\ &\quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ &\quad r = 1, 2, \ldots, w). \end{aligned}$$

Hierin bezeichnen wiederum EG den Erwartungswert des Gewinnes der betrachteten Planperiode, p_j den Verkaufs-

1) Vgl. S. 53.

preis pro Mengeneinheit der Produktart j, $\bar{m}_j$ den Mittelwert der Nachfrage für Produktart j, l_j die Kosten einer Überproduktion, g_j die Kosten einer zu geringen Produktion (jeweils bezogen auf die Mengeneinheit der Produktart j), $\varphi_j(y_j)$ die Dichtefunktion der Nachfrage nach Produktart j, $k_{jr}x_{jr}$ die Produktionskosten für die Herstellung einer Mengeneinheit der Erzeugnisart j mit der Intensität r, a_{ijr} diejenige Einsatzmenge des Produktionsfaktors i, die zur Erstellung einer Einheit von Produktart j bei einer Intensität r erforderlich ist (Produktionskoeffizient), b_i die pro Planperiode (beschränkt) zur Verfügung stehende Menge des Produktionsfaktors i, n die Anzahl der Produktarten , m die Anzahl der Produktionsfaktoren, w die Anzahl der möglichen Intensitäten[1] und K_F die fixen Kosten der Planperiode.

Weiterhin bezeichnen h_{jr} den zulässigen in w Intervalle zerlegten Bereich von x_j, wobei gilt

(66) $(0=) = h_{jo} < h_{j1} < h_{j2} < \ldots < h_{jw} \leq (\leq \infty)$[2],

und u_{jr} Hilfsvariablen, die sicherstellen, daß in der optimalen Lösung höchstens ein x_{jr} positiv ist[3]. Werden keine Hilfsvariablen eingeführt, dann kann bei diesem Problem von vorneherein nicht unbedingt ausgeschlossen werden, daß sich in Spezialfällen Lösungen ergeben, die ökonomisch nicht sinnvoll sind.

---

1) Der Fall kontinuierlich variierbarer Intensitäten wird hier nicht betrachtet, die oben aufgezeigte Konzeption ist aber auch (als Approximation) hierfür gültig.

2) Für praktische Rechnungen genügt es im allgemeinen, für h_{jw} einen hinreichend großen Wert zu wählen.

3) Vgl. auch W.DINKELBACH und H.STEFFENS, Gemischt ganzzahlige lineare Programme zur Lösung gewisser Entscheidungsprobleme, in: Ufo (5) 1961, S. 3 ff., insbes. S. 7 ff.; W.DINKELBACH UND H.HAX, Die Anwendung der gemischt-ganzzahligen Programmierung auf betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme, in: ZfhF (14) 1962, S. 181 ff.

Hiermit liegt zunächst eine nichtlineare gemischt-ganzzahlige Programmierungsaufgabe vor. Berücksichtigt man nun aber weiterhin die Tatsache, daß sich

(63) noch vereinfachen läßt ($\sum_{j=1}^{n} p_j \bar{m}_j$, $\sum_{j=1}^{n} l_j \bar{m}_j$

und K_F sind Konstante, die im Anschluß an die Rechenoperationen addiert bzw. subtrahiert werden können), und sich (63) endgültig in der Form

$$(63)' \quad EG = \left\{ - \sum_{j=1}^{n} (k_j + l_j)\, x_j - \sum_{j=1}^{n} (p_j + g_j + l_j) \cdot \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\, \varphi_j(y_j)\, dy_j \right\} \rightarrow \text{Max.}$$

schreiben läßt, dann liegt eine gemischt-ganzzahlige Programmierungsaufgabe mit einer zerlegbar konkaven Zielfunktion vor. Zerlegbare konkave Funktionen lassen sich aber relativ leicht linear approximieren, so daß sich das Problem der Bestimmung des optimalen Produktionsprogrammes bei stochastischer Nachfrage unter gleichzeitiger Berücksichtigung möglicher intensitätsmäßiger Anpassung als gemischt-ganzzahlige lineare Programmierungsaufgabe stellt, die grundsätzlich mit dem GOMORY-Algorithmus gelöst werden kann.

Wie die meisten nichtlinearen Optimierungsaufgaben kann das oben aufgezeigte Problem auch als stufenweises (oder dynamisches) Programmierungsproblem formuliert und als solches gelöst werden. Was im speziellen Fall zweckmäßiger ist, ist eine Frage der Rechenökonomie, wobei die (zuweilen) schlechte Konvergenz des GOMORY-Algorithmus gegen die beim Vorliegen zahlreicher Kapazitätsrestriktionen rasch ansteigende Anzahl der zu betrachtenden Kombinationen bei der stufenweisen Programmierung abzuwägen ist.

(b_2) Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage und zeitlicher Anpassung

Betrachten wir nun den Fall, daß eine Unternehmung nur die Möglichkeit zeitlicher Anpassung habe, intensitätsmäßige und quantitative Anpassung seien ausgeschlossen. Die Unternehmung sei beispielsweise in der Lage, eine zusätzliche Schicht einzulegen, und zwar möge etwa für die ersten beiden Überstunden ein Zuschlag von 25% gegenüber dem Normallohn gezahlt werden und für die zusätzlichen Überstunden ein Zuschlag von 50%. Die Unternehmung hat nun darüber zu entscheiden, welche Produktartenmengen sie herstellen und auf dem Markt anbieten will. Verzichtet sie auf eine zeitliche Anpassung, dann hat sie möglicherweise mit insgesamt höheren erwarteten Kosten einer zu geringen Produktion (insbesondere Goodwill-Verlusten) zu rechnen, dafür erhöhen sich aber die Produktionskosten pro Mengeneinheit nicht, legt sie aber eine zusätzliche Schicht ein und bietet eine größere Menge von Produktart j an, dann erhöhen sich die Kosten der Produktion pro Mengeneinheit der Produktart j, und die Unternehmung muß etwa mit insgesamt höheren erwarteten Kosten einer Überproduktion (insbesondere Lagerkosten) rechnen.

Zur Lösung dieses Optimierungsproblems kann in analoger Weise zu der oben aufgezeigten Konzeption vorgegangen werden, und zwar wird ein Erzeugnis der Art j, das während der normalen Arbeitszeit hergestellt wird, als unterschiedlich zu einem Erzeugnis der Art j angesehen, das während der ersten beiden Überstunden oder in zusätzlich gefahrenen Überstunden gefertigt wird; die Einteilung läßt sich dabei natürlich beliebig fein durchführen. Weiterhin werde vereinfachend angenommen, daß die Unternehmung sich mit allen Produktionsfaktoren gleichmäßig zeitlich anpaßt; werden etwa in der Dreherei zwei Überstunden eingelegt, so soll dies auch für die Fräserei und die Bohrerei der Fall sein.

Bezeichnet man nun die maximal (unter Berücksichtigung zusätzlicher Schichten) pro Planperiode zur Verfügung stehende Menge des Produktionsfaktors i (etwa Drehstunden) mit b_i und mit q (q = 1, 2, ..., d) die Anzahl der im Rahmen der zeitlichen Anpassung möglichen Intervalle, denen unterschiedliche Produktionskosten zugeordnet sind, dann stellt sich das Problem der Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage unter Berücksichtigung möglicher zeitlicher Anpassung der Unternehmung in der Form:

$$(67)\quad EG = \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{m}_j - \sum_{j=1}^{n} l_j (x_j - \bar{m}_j) - \sum_{j=1}^{n} (p_j + g_j + l_j) \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\, \varphi_j(y_j)\, dy_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{d} k_{jq} x_{jq} - K_F \Bigg\} \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

unter den Nebenbedingungen

$$(68)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{d} a_{ij} x_{jq} \leq b_i, \\ x_j - \sum_{q=1}^{d} x_{jq} = 0, \end{cases} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m, \\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{matrix}$$

und

$$(69)\quad \begin{cases} x_j \geq 0, \\ x_{jq} \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, n, \\ q = 1, 2, \ldots, d. \end{matrix}$$

Wie man sieht, liegt hiermit (nach Vornahme der für (67) möglichen Vereinfachungen) eine Programmierungsaufgabe mit einer zerlegbar konkaven Zielfunktion

und linearen Nebenbedingungen vor[1], ein Problem, das in wirksamer Weise mit den bekannten Approximationsverfahren[2] behandelt werden kann; für Probleme größeren Umfanges empfiehlt sich dabei eine Anwendung des Dekompositionsprinzips[3]. Eine Einführung von Hilfsvariablen erübrigt sich hier, weil bei Anwendung des Simplex-Algorithmus automatisch sichergestellt wird, daß keine der Aufgabenstellung widersprechende Lösungen auftreten, was bei dem zuvor behandelten Problem, wo für eine bestimmte Produktartenmenge unterschiedliche Produktionskoeffizienten gelten können, in Spezialfällen nicht immer gewährleistet ist.

(b_3) Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage und quantitativer Anpassung

Hat eine Unternehmung die Möglichkeit, sich quantitativ anzupassen, dann läßt sich die bisher aufgezeigte Konzeption in ganz analoger Weise anwenden. Wir betrachten hier den Fall, daß in der Unternehmung jeweils Aggregate unterschiedlicher Qualität vorhanden sind; so mögen sich etwa in der Dreherei eine Automatendrehbank und einige Revolverdrehbänke verschiedener Qualität befinden, wobei die qualitativen Unterschiede beispielsweise aus der Verwendung unterschiedlicher Drehstähle resultieren können. Für die Unternehmung bestehe die Möglichkeit, sich selektiv anzupassen, intensitätsmäßige und

---

1) Die hier angenommene Konstanz der Produktionskoeffizienten a_{ij} ($i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n$) gilt natürlich nur dann, wenn die Leistungszeit keinen Einfluß auf den Faktorverbrauch ausübt, was hier aber unterstellt werden soll.

2) Vgl. hierzu insbesondere A.CHARNES und C.LEMKE, Minimization of Nonlinear Separable Convex Functions, in: Nav. Res. Log. Quart. (1) 1954, S. 301 ff.; G.B.DANTZIG, Recent Advances in Linear Programming, in: Man. Sci. (2) 1956, S. 131 ff.

3) Vgl. hierzu vor allem G.B.DANTZIG und P.WOLFE, Decomposition Principle for Linear Programs, in: Op. Res. (8) 1960, s. 101 ff.

zeitliche Anpassung seien ausgeschlossen, Stillegungs- und Inbetriebnahmekosten mögen nicht betrachtet zu werden brauchen. Behandelt man nun in analoger Weise zu dem bisherigen Vorgehen ein Erzeugnis der Art j, das auf einem bestimmten Aggregat (etwa der Automatendrehbank) produziert wird, als unterschiedlich zu einem Erzeugnis der Art j, das auf einem anderen Aggregat (z.B. einer bestimmten Revolverdrehbank) gefertigt wird, dann läßt sich das Problem der Produktionsprogrammplanung bei stochastischer Nachfrage und quantitativer (selektiver) Anpassung wie folgt wiedergeben:

$$(70)\quad EG = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{m}_j - \sum_{j=1}^{n} l_j (x_j - \bar{m}_j) - \sum_{j=1}^{n} (p_j + g_j + l_j) \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\, \varphi_j(y_j)\, dy_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{e=1}^{v_i} k_{jie} x_{jie} - K_F \Big\} \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

unter Berücksichtigung von

$$(71)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{jie} \leq b_{ie}\,, \\ x_j - \sum_{i=1}^{m} \sum_{e=1}^{v_i} x_{jie} = 0\,, \end{cases}$$

$$(72)\quad \sum_{e=1}^{v_1} x_{j1e} = \sum_{e=1}^{v_2} x_{j2e} = \cdots = \sum_{e=1}^{v_m} x_{jme} \qquad (\text{für alle } j)$$

und

$$(73)\quad \begin{cases} x_j \geq 0\,, \\ x_{jie} \geq 0\,, \end{cases} \quad \begin{array}{l} j=1,2,\ldots,n, \\ i=1,2,\ldots,m, \\ e=1,2,\ldots,v_i. \end{array}$$

Hierin bezeichnen die e ($e=1,2,\ldots,v_i$) die Anzahl der von einem Produktionsfaktor vorhandenen Aggregate, also etwa die Anzahl der Drehbänke; die übrigen Symbole gelten analog zu den bisherigen Modellen. Die Bedingung (72) soll sichern, daß beispielsweise nicht mehr Wellen überdreht werden als anschließend gebohrt werden können; ansonsten müßten noch die aus einer Lagerbildung innerhalb des Fertigungsprozesses resultierenden Kosten betrachtet werden, wovon aber hier vereinfachend abgesehen werden soll.

Seiner Struktur nach unterscheidet sich diese Programmierungsaufgabe nicht von dem Problem (67), (68) und (69); die dafür aufgezeigte Lösungsmöglichkeit gilt auch hier.

3. Die Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage unter Berücksichtigung einer Kombination von intensitätsmäßiger, zeitlicher und quantitativer Anpassung

Bisher wurde nur die isolierte Anwendung einer einzelnen Anpassungsart betrachtet. In der Regel können aber meist sehr vielfältige Kombinationen der bisher betrachteten Anpassungsprozesse realisiert werden. So können etwa in einer Dreherei mit Drehbänken unterschiedlicher Qualität zur Erzeugung einer bestimmten Produktmenge meist sowohl verschiedene Kombinationen von Vorschub und Spantiefe gewählt werden, denen dann jeweils andere Schnittgeschwindigkeiten entsprechen, als auch Überstunden eingelegt oder zusätzliche Aggregate in Betrieb genommen werden; es besteht also in der Regel auch die Möglichkeit einer Kombination von intensitätsmäßiger, zeitlicher und quantitativer Anpassung. In einer Unternehmung, in der die Möglichkeit besteht, mehrere Anpassungsprozesse durchzuführen, ist die Kostenkurve eines von einem rational handelnden Unternehmer geleiteten Betriebes aber nur dann ein-

deutig bestimmt, wenn jeder Produktmenge die Produktionskosten derjenigen Kombination von Anpassungsprozessen zugeordnet werden, für welche die Produktionskosten einer Erzeugnisartmenge ein Minimum werden.[1)]

Im Rahmen des hier untersuchten Problems der Bestimmung des optimalen Produktionsprogrammes bei stochastischer Nachfrage unter gleichzeitiger Berücksichtigung von Anpassungsprozeßkombinationen geht es nun primär nicht um die kostenminimale Herstellung vorgegebener Produktmengen, sondern darum, mit gegebenen Mitteln den Erwartungswert des Gewinnes zu maximieren, wobei zu den 'gegebenen Mitteln' auch alle möglichen Kombinationen möglicher Anpassungsprozesse zu rechnen sind. Das unter der Prämisse vollkommener Voraussicht definierte Rationalprinzip, daß nämlich ein bestimmter Erfolg mit minimalem Mitteleinsatz bzw. daß mit einem gegebenen Mitteleinsatz ein maximaler Erfolg erreicht werden soll, erfährt hier also eine kleine Modifikation. So kann es etwa unter Risikogesichtspunkten für den Eigentümer eines Fischereifahrzeuges durchaus sinnvoll sein, den Fang, d.h. die vorgegebene Produktmenge, nicht mit minimalen Transportkosten vom Fanggebiet zum Zielhafen zu bringen, sondern die Dieselmotoren seines Fahrzeuges bis an die Grenze ihrer Leistungsfähigkeit zu belasten, wenn sich auf Grund der Tatsache, daß er einen Tag früher als seine Konkurrenten im Zielhafen ankommt, die Absatzchancen für bestimmte Produktarten (Dorsch, Seelachs usw.) und damit der erwartete Erlös erhöhen. Selbstverständlich steigen durch den höheren Treibstoffverbrauch und Materialverschleiß die Transportkosten und damit die Produktionskosten für die 'Pro-

---

1) Vgl. hierzu vor allem L.PACK, Die Ermittlung der kostenoptimalen Anpassungsprozeßkombination, a.a.O., S. 466.

duktion' einer Tonne Fisch, der Unternehmer handelt jedoch noch immer so lange rational, wie nicht der erwartete erzielbare Mehrerlös auf Grund der Tatsache, daß er früher als seine Konkurrenten im Zielhafen anlangt, durch die Transportkostenerhöhung überkompensiert wird. Dies gilt in gleichem Maße beispielsweise für eine Zigarettenfabrik, für die es bei der Einführung einer neuen Marke von ganz wesentlicher Bedeutung ist, daß sämtliche Auslieferungsläger und Einzelhändler im angestrebten Verbreitungsgebiet am Stichtage des Einsetzens der Werbung die neue Marke vorrätig haben. Ist dies nicht der Fall, dann besteht durchaus die Möglichkeit, daß auf Grund der gestarteten Werbekampagne nach der neuen Zigarettenmarke nachgefragt wird, diese aber in verschiedenen Tabakwarengeschäften noch gar nicht geführt wird. Dies kann und wird (wie verschiedene Fälle aus der Praxis gezeigt haben) in der Regel zu starken Goodwill-Verlusten führen, welche die neue Marke schon bei ihrer Einführung am Markt stark belasten. Aus diesem Gesichtspunkt heraus handelt ein Zigarettenfabrikant unter Umständen durchaus rational, wenn er zur Erreichung seines Zieles beispielsweise sämtliche Aggregate bis an ihre maximale Leistungsfähigkeit beansprucht und auch ältere und kostenungünstigere Maschinen in Betrieb nimmt. Und zwar handelt er noch so lange rational, wie der erwartete Goodwill-Verlust im Falle einer zu geringen Produktion größer ist als die durch die Überbeanspruchung der Aggregate gestiegenen Produktionskosten.

(a) Formulierung des Modelles

Eine Unternehmung produziere n Produktarten in den Mengen x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), von denen angenommen wird, daß sie beliebig teilbar seien. Zur Verfügung stehen ihr m Produktionsfaktoren, deren Kapazität beschränkt sei. Anpassungsprozesse seien jedoch mög-

lich, und zwar habe die Unternehmung die Möglichkeit, sich sowohl intensitätsmäßig[1] als auch zeitlich und quantitativ (selektiv) anzupassen. Bei den von der Unternehmung hergestellten und auf dem Markt angebotenen Erzeugnissen möge es sich um 'absatzmäßig unabhängige' Erzeugnisse handeln, die Nachfragemenge y_j nach der Produktart j sei eine (stetige) Zufallsvariable mit der Dichtefunktion $\varphi_j(y_j)$. Von Inbetriebnahme- und Stillstandskosten möge vereinfachend abgesehen werden können[2]. Folgt man nun der bisherigen Konzeption, dann lautet das Problem der Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage unter Berücksichtigung einer Kombination von intensitätsmäßiger, zeitlicher und quantitativer (selektiver) Anpassung (die bisher verwendeten Symbole gelten analog):

$$(74)\quad EG = \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{m}_j - \sum_{j=1}^{n} l_j (x_j - \bar{m}_j) - \sum_{j=1}^{n} (p_j + g_j + l_j) \int_{x_j}^{\infty} (y_j - x_j)\, \varphi_j(y_j)\, dy_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{w} \sum_{q=1}^{d} \sum_{i=1}^{m} \sum_{e=1}^{v_i} k_{jrqie} x_{jrqie} - K_F \Bigg\} \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$(75)\qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{w} \sum_{q=1}^{d} a_{ijr} x_{jrie} \leq b_{ie} ,$$

---

1) Es werden hier diskrete Variationen der Intensitäten betrachtet, was z.B. für Maschinen immer dann gilt, wenn eine stufenlose Regelung der Drehzahlen nicht möglich ist.

2) Vgl. zu diesem Problemkreis vor allem L.PACK, Die Elastizität der Kosten, a.a.O., S. 132 und S. 322 ff.

$$x_j - \sum_{r=1}^{w} \sum_{q=1}^{d} \sum_{i=1}^{m} \sum_{e=1}^{v_i} x_{jrqie} = 0 ,$$

$$\sum_{e=1}^{v_1} x_{jrq1e} = \sum_{e=1}^{v_2} x_{jrq2e} = \cdots = \sum_{e=1}^{v_m} x_{jrqme} ,$$

(76)
$$\begin{cases} \sum_{r=1}^{w} u_{jrqie} \leq 1 , \\ x_{jrqie} \leq u_{jrqie}\, h_{jrqie} , \end{cases}$$

und

(77)
$$\begin{cases} x_{jrqie} \geq 0 , \\ u_{jrqie} \geq 0 , \\ u_{jrqie} \quad \text{ganzzahlig!} , \end{cases}$$

$j = 1, 2, \ldots, n,$
$r = 1, 2, \ldots, w,$
$q = 1, 2, \ldots, d,$
$i = 1, 2, \ldots, m,$
$e = 1, 2, \ldots, v_i.$

(b) Hinweise auf Lösungsverfahren

Hiermit liegt eine nichtlineare gemischt-ganzzahlige Programmierungsaufgabe vor. Wegen der besonderen Form der Zielfunktion (zerlegbar konkav) kann das durch (74), (75), (76) und (77) beschriebene Problem aber in eine gemischt-ganzzahlige lineare Programmierungsaufgabe überführt werden, die sich grundsätzlich - sofern alle Daten bekannt sind - mit dem GOMORY-Algorithmus lösen läßt.

Wesentlich schwieriger wird das Problem der Bestimmung des optimalen Produktionsprogrammes bei stochastischer Nachfrage unter gleichzeitiger Berücksichtigung einer

Kombination von intensitätsmäßiger, zeitlicher und quantitativer Anpassung, wenn noch Stillstands- und Inbetriebnahmekosten berücksichtigt werden müssen, und wenn darüber hinaus noch den 'absatzmäßigen' Interdependenzen zwischen den von der Unternehmung hergestellten und auf dem Markt angebotenen Erzeugnissen Rechnung getragen werden muß. Zwar läßt sich beispielsweise auch das Problem der Berücksichtigung von Inbetriebnahmekosten bei der selektiven Anpassung noch im Rahmen eines gemischt-ganzzahligen linearen Programmes behandeln (durch eine Kombination mit dem sogenannten 'fixed-charge problem'), allerdings läßt hierbei die rasch anwachsende Anzahl der Variablen, Hilfsvariablen und Nebenbedingungen die theoretische Anwendbarkeit der gemischt-ganzzahligen linearen Programmierung schon bei relativ einfachen Problemen sehr schnell ihre praktische Grenze finden.

Dies gilt in noch weitaus stärkerem Maße für den Fall, daß bei den Erzeugnissen im Produktionsprogramm außerdem 'absatzmäßige' Interdependenzen zu beachten sind. Bei bekannter analytischer Form der Zielfunktion läßt sich auch dieses Problem - wie fast alle nichtlinearen Programmierungsaufgaben - theoretisch als gemischt-ganzzahliges Programmierungsproblem formulieren; um sicherzustellen, daß auch tatsächlich das globale, und nicht ein lokales Optimum erreicht wird, müssen aber derart zahlreiche Hilfsvariablen und Nebenbedingungen eingeführt werden, daß eine Lösung mit Hilfe des GOMORY-Algorithmus nur noch in besonders einfach gelagerten Fällen praktikabel erscheint.

Auch bei der noch verbleibenden Möglichkeit, das Problem mit Hilfe der stufenweisen (dynamischen Programmierung zu lösen, stößt man sehr bald auf außerordentliche praktische Schwierigkeiten. Zwar ist auch hier eine Formulierung als dynamische Programmierungsaufgabe grundsätzlich möglich, wobei sich die gewählte Art des Vorgehens, nur mit konstanten Produktions-

koeffizienten zu arbeiten, insofern vorteihaft auswirkt, als hierdurch der mögliche Variationsbereich der Entscheidungsvariablen eindeutig definiert ist. So kann etwa allgemein eine Variable x_j beispielsweise beim Vorliegen einer Nebenbedingung nur Werte im Bereich

$$(78) \quad 0 \leq x_j \leq \frac{b}{a_j}$$

oder in unserem Falle nur innerhalb

$$(79) \quad 0 \leq x_{jrqie} \leq \text{Min}\left[\left(\frac{b_{1e}}{a_{1jr}}\right);\left(\frac{b_{2e}}{a_{2jr}}\right); \ldots;\left(\frac{b_{me}}{a_{mjr}}\right)\right]$$

annehmen.

Trotz dieses Vorteils, wodurch gewisse Kombinationen von Zustandsparametern und Entscheidungsvariablen als gegen die Nebenbedingungen verstoßend und daher unzulässig von vorneherein ausgeschlossen werden können, ist die Zahl der noch verbleibenden Kombinationsmöglichkeiten außerordentlich groß. Betrachten wir etwa als Beispiel ein Problem mit 100 Nebenbedingungen, d.h. mit 100 Zustandsparametern, was in praktischen Situationen durchaus keine Seltenheit darstellt. Kann jeder Zustandsparameter nur 100 Werte annehmen, dann sind 100^{100} Werte zu tabellieren. Nimmt man an, daß auf einem Elektronenrechner 10^6 Werte pro Sekunde errechnet werden können, dann würden zur Lösung eines solchen Problems immerhin 100^{97} Sekunden oder rund 100^{93} Jahre benötigt[1], vorausgesetzt, daß es nicht gelingt, einen Algorithmus zu entwickeln, der die Anzahl der zu betrachtenden Kombinationen außerordentlich stark reduziert. Leider ist u.W. aus der Literatur zur dynamischen Programmierung bisher noch kein solcher Algorithmus bekannt.

---

1) Vgl. G.HADLEY, Nonlinear and Dynamic Programming, a.a.O., S. 433.

C. Ein mehrstufiges stochastisches Entscheidungsmodell zur Behandlung des Problems einer simultanen Planung von Produktionsprogramm, Preisen und Reklame

I. Die Notwendigkeit einer simultanen Planung von Produktionsprogramm, Preisen und Reklame

Die bisherige Untersuchung des Problems der Planung des Produktionsprogrammes bei stochastischer Nachfrage beschränkte sich auf die Bestimmung isoliert optimaler Produktionsprogramme, d.h. solcher Programme, bei denen auf eine gleichzeitige Planung der Preise und des Reklameeinsatzes verzichtet wurde. Ein solches Unterfangen entspricht zwar in vielen Fällen dem Vorgehen der Praxis, ist aber aus mehreren Gründen als problematisch anzusehen. Bevor hierauf aber näher eingegangen wird, soll zuvor kurz umrissen werden, was wir im folgenden unter Reklame verstehen wollen.

1. Der Begriff der Reklame

Unter Reklame sollen im folgenden alle Verkaufsanstrengungen einer Unternehmung zur Beeinflussung der Nachfragefunktionen der von ihr angebotenen Güter verstanden werden[1]. Hierbei muß man sich natürlich darüber klar sein, daß der Begriff der Reklame in dem hier verwendeten Sinne weiter ist als der üblicherweise unter Reklame oder Werbung verstandene; denn er umfaßt das gesamte absatzpolitische Instrumentarium (außer der Preispolitik), also sowohl die Absatzmethoden, als auch die Produktgestaltung und Werbung[2], und umfaßt somit alle diejenigen Mittel zur Überwindung von Verkaufswiderständen, die auch unter der Bezeichnung 'Präferenzpolitik' zusammengefaßt werden[3].

---

1) Vgl. W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 204.

2) Vgl. E.GUTENBERG, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 2. Band: Der Absatz, 4. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S. 44.

3) Vgl. etwa G.WÖHE, Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, 4. Aufl., Berlin und Frankfurt/M. 1962, S. 225.

Selbstverständlich kann (und wird in vielen Fällen) auch die Preispolitik zur Beeinflussung der Nachfragefunktion eines Gutes und der anderen von der Unternehmung angebotenen Güter beitragen. Dennoch soll hier dem GUTENBERG'schen Schema des absatzpolitischen Instrumentariums nicht gefolgt werden; denn bezieht man die Preispolitik in das absatzpolitische Instrumentarium ein, dann besteht keine logische Begründung dafür, nicht auch die Mengenpolitik, die ja auch nachfragebeeinflussende Auswirkungen hat, mit einzubeziehen. Ein solches Vorgehen würde aber bedeuten, daß sowohl die Preis- als auch die Mengen- und Reklamepolitik, d.h. praktisch alle Aktionsparameter einer Unternehmung unter dem Begriff 'absatzpolitisches Instrumentarium' zusammengefaßt werden müßten, was nicht zweckmäßig erscheint, da es dem in der Wirtschaftstheorie üblichen Vorgehen[1] einer Unterteilung nach Preis-, Mengen- und Reklamepolitik nicht entspricht.

Zusammenfassend sollen hier also unter Reklame alle bewußt von der Unternehmung herbeigeführten Einwirkungen auf die Präferenzstruktur der Nachfrager nach den von der Unternehmung angebotenen Gütern verstanden werden[2].

2. Die Problematik einer isolierten Planung des Produktionsprogrammes

Trotz ihrer außerordentlichen Bedeutung für den Ablauf des heutigen Wirtschaftsgeschehens ist das Phänomen der Reklame lange Zeit von der wirtschaftswissenschaftlichen Forschung vernachlässigt worden. Solange man die Analyse auf die Vorgänge auf vollkommenen Märkten beschränkte, d.h. auf solchen Märkten,

1) Vgl. hierzu etwa E.SCHNEIDER, Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil, 6. verb. Aufl., Tübingen 1960, S. 128; W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 118/119.

2) Vgl. W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 119.

bei denen sowohl von Seiten der Anbieter wie auch von Seiten der Nachfrager Präferenzen fehlen, hatte man auch keinen Anlaß, eine Erscheinung zu untersuchen, die den Wirtschaftsabläufen auf vollkommenen Märkten ex definitione wesensfremd ist. Erst durch die Standortsveränderung der ökonomischen Forschung in den dreißiger Jahren und ihre Abkehr von der klassischen Fiktion des vollkommenen Marktes erwachte das Interesse an dem Phänomen der Reklame[1]. Grundlegend sind hier vor allem die Arbeiten von E.H.CHAMBERLIN[2], F.ZEUTHEN[3] und B.BARFOD[4]. Aber auch hier handelt es sich vor allem um rein theoretische Untersuchungen, insbesondere aus der Sicht des Problems des Gruppengleichgewichts auf unvollkommenen Märkten. Eine Synthese der in diesen Arbeiten erzielten Ergebnisse mit der Theorie der Mehrproduktbetriebe und darüber hinaus die Formulierung von Entscheidungsmodellen zur Bestimmung der optimalen Preis-, Produktions- und Reklamepolitik einer Mehrproduktunternehmung erfolgte erst in jüngerer Zeit, und hier vor allem durch W.KRELLE, der für verschiedene Marktformen Programmierungsansätze zur Lösung dieses Problems aufzeigt[5]. Von betriebswirtschaftlicher Seite ist trotz der außerordentlichen Bedeutung des Reklamephänomens für den Wirtschaftsplan einer Unternehmung diesem Problem bei weitem nicht die Beachtung geschenkt worden, die ihm zukommt. Zwar wurde auch hier

---

1) Vgl. E.SCHNEIDER, Eine Theorie der Reklame, in: Z.f.Nat. (9) 1939, S. 450, (wieder abgedruckt in: Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft, a.a.O., S. 304 ff.).

2) E.H.CHAMBERLIN, The Theory of Monopolistic Competition, 6. Aufl., Cambridge, Mass. und London 1948.

3) F.ZEUTHEN, Effect and Cost of Advertisement from a Theoretic Aspect, in: Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi, Kopenhagen 1935.

4) B.BARFOD, Reklamen i teoretisk-økonomisk Belysning, Kopenhagen 1937 [3) und 4) zitiert nach E.SCHNEIDER, Einführung, II. Teil, a.a.O., S. 142].

5) W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 629 ff.

die Notwendigkeit einer simultanen Planung von Preisen, Mengen und Reklameeinsatz erkannt[1], die wenigen Ansätze zur Lösung dieses Problems reichen aber über eine Formalisierung kaum hinaus[2]. Die sonstigen betriebswirtschaftlichen Veröffentlichungen zum Reklamephänomen beschäftigen sich vor allem mit Einzelfragen, wie etwa der Absatztechnik und der Werbung[3], auf den Zusammenhang mit der Produktionsprogrammplanung wird jedoch kaum explizit eingegangen, rechenbare Ansätze zur Bestimmung optimaler Preis-, Produktions- und Reklameprogramme fehlen fast völlig.

Dabei ist eine Planung des Produktionsprogrammes in Mehrproduktbetrieben ohne gleichzeitige Festlegung der Preise und des Reklameeinsatzes vom betriebswirtschaftlichen Standpunkt aus als genauso problematisch anzusehen wie eine Produktionsprogrammplanung ohne gleichzeitige Berücksichtigung der Ablaufplanung, d.h. der Losgrößen, der Reihenfolge der Arbeitsgänge und des Sortenwechsels. Genau wie dabei durch die Festlegung eines bestimmten Produktionsprogrammes gleichzeitig über den Ablauf des Fertigungsprozesses und damit über die Höhe der Produktionskosten, die ihrerseits wiederum das Produktionsprogramm bestimmen, entschieden wird, was nichts anderes besagt, als daß eine optimale Produktionsprogrammplanung streng genommen nur simultan mit der Ablaufplanung durchgeführt werden kann, wird hierbei gleichzeitig die Höhe der Kosten des Verkaufes fixiert und darüber hinaus durch den Einsatz von Reklamefaktoren über die

---

1) So etwa E.GUTENBERG, Grundlagen, 1. Band: Die Produktion, 5. Aufl., a.a.O., S. 127: "Man sieht sofort, daß, wenn man die Absatzmengen planen will, die Wirkung einer Veränderung der Verkaufsorganisation, der Produkteigenschaften, der Werbung und der Preisstellung in die Planungsrechnung einbezogen werden muß".

2) Vgl. etwa E.GUTENBERG, Grundlagen, 2. Band: Der Absatz, a.a.O., S. 471/472.

3) Siehe hierzu etwa: C.HUNDHAUSEN, Wesen und Formen der Werbung, Essen 1954; W.KOCH, Grundlagen und Technik des Vertriebes, Berlin 1950; E.SCHÄFER, Die Aufgabe der Absatzwirtschaft, Köln und Opladen 1950; E.SUNDHOFF, Absatzorganisation, in: Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1958.

Lage der Nachfragefunktionen für die von der Unternehmung angebotenen Güter entschieden, die ihrerseits wiederum die Preise und damit das Produktionsprogramm beeinflussen. Die Problematik einer isolierten Produktionsprogrammplanung wird besonders deutlich, wenn man die neben einer simultanen Planung bestehenden Möglichkeiten betrachtet, daß nämlich zeitlich vor der Festlegung des Produktionsprogrammes über den Reklameeinsatz in dem von uns verstandenen Sinne entschieden wird, oder daß erst im Anschluß an die Planung des Produktionsprogrammes der Einsatz der Reklame geplant wird.

Wird zuerst über den Reklameeinsatz, etwa auf Grund eines Budgets, entschieden und dann anschließend unabhängig davon über das Produktionsprogramm, so kann dies im Extremfall dazu führen, daß etwa für Produkte geworben wird, die nachher gar nicht im Produktionsprogramm erscheinen, oder etwa die Vertriebsorganisation für ein Produkt über- oder unterdimensioniert wird.

Dieser Fall kann natürlich dadurch vermieden werden, daß über den Einsatz der Reklamefaktoren erst im Anschluß an die Festlegung des Produktionsprogrammes entschieden wird. Ein solches Vorgehen ist aber nicht minder problematisch. Denn durch den Einsatz von Reklame, sei es nun durch eine Änderung der Vertriebsmethode, eine Erhöhung der Werbung oder durch Produktgestaltung (etwa Verpackung), wird auf die Präferenzstruktur der Abnehmer der von der Unternehmung angebotenen Erzeugnisse eingewirkt, was nichts anderes bedeutet, als daß sich die Nachfragekurven für die einzelnen Produkte ändern. Wird nun auf Grund der Nachfragestruktur, wie sie vor dem Einsatz von Reklame bestand, das Produktionsprogramm festgelegt, und erst dann über das Reklameprogramm in dem von uns verstandenen Sinne entschieden, so bedeutet dies, daß das Produktionsprogramm auf einem Datenkranz beruht, der gar nicht mehr besteht, was zu außer-

ordentlich schwerwiegenden Fehlplanungen führen kann; denn zu dem gleichen Preise lassen sich etwa größere Mengen eines Produktes absetzen als ursprünglich angenommen, oder die gleichen Mengen hätten zu einem höheren Preise als dem geplanten abgesetzt werden können, was in der Regel eine erhebliche Änderung des Produktionsprogrammes induziert, wenn dieses noch den Anspruch erheben will, im Sinne der angestrebten Zielsetzung optimal zu sein.

Schon diese kurzen Ausführungen haben mit hinreichender Deutlichkeit gezeigt, daß das Problem der Produktionsprogrammplanung auf unvollkommenen Märkten, und nur diese sind von praktischer Relevanz, kein reines Mengenproblem, sondern ein Mehr-Parameter-Problem darstellt, wobei alle Aktionsparameter der Unternehmung simultan geplant werden müssen, und daß ein isoliert geplantes Produktionsprogramm nur ein Teiloptimum darstellen kann, das notwendigerweise laufend zu Planrevisionen Anlaß gibt. Diese laufenden Planrevisionen werden einen Betrieb umso empfindlicher treffen, je weniger elastisch er ist, was bei der hohen Fixkostenintensität und der durch sie induzierten Unelastizität moderner Industriebetriebe oft der Fall sein wird.

3. Die Unzulänglichkeit einer statischen Analyse des Problems der simultanen Preis-, Mengen- und Reklameplanung

Während das Problem einer simultanen Bestimmung von Preisen, Produktionsprogramm und Reklameeinsatz im Einproduktbetrieb einfach zu lösen ist, und sich auch allgemein die Bedingungen für das Vorliegen eines Optimums leicht angeben lassen[1], stehen einer

---

1) (a) Bei konstantem Preis muß bei einer Variation des Absatzes der Grenzerlös gleich der Summe aus Grenzproduktions- und Grenzreklamekosten (jeweils bezogen auf die Menge) sein, und
(b) bei konstantem Absatz muß bei einer Variation des Preises der Grenzerlös gleich den Grenzreklamekosten (jeweils bezogen auf den Preis) sein.
Vgl. hierzu etwa E.SCHNEIDER, Einführung, II. Teil, a.a.O., S. 140/141.

praktischen Lösung dieses Problems in Mehrproduktunternehmungen größere Schwierigkeiten entgegen, die vor allem aus der Tatsache resultieren, daß gleichzeitig das Problem der Zuordnung der Produktionsfaktoren und der Reklamearten gelöst werden muß. Dennoch läßt sich auch dieses Problem für den Fall vollkommener Voraussicht, wie W.KRELLE gezeigt hat, auf einfachem Wege in eine (quadratische) Programmierungsaufgabe überführen, die mit den bekannten Algorithmen (etwa der WOLFE'schen Methode) auch einer praktischen Lösung zugänglich gemacht werden kann. So lautet etwa die quadratische Programmierungsaufgabe bei Annahme von linear-limitationalen Produktionsfunktionen für die Marktformen des Monopols und des Oligopols[1]

(80) $G = q'x - x'Px \overset{!}{=} \text{Max.}$

unter den Nebenbedingungen

(81) $Rx \leq z$

und

(82) $x \geq o,$

worin x den Vektor der möglichen Produktionsprogramme und Reklamearten bezeichnet, und z den Vektor der maximal verfügbaren Produktionsfaktorartmengen und maximal möglichen Reklameaufwendungen darstellt. Die Komponenten bzw. Elemente des Vektors q und der Matrizen P und R lassen sich unmittelbar aus den Faktorangebots-, Nachfrage- und Kostenfunktionen ableiten, worauf hier aber nicht näher eingegangen zu werden braucht[2]. Für die Marktform des Polypols und allgemein bei starren Verkaufspreisen ergeben sich entsprechende Vereinfachungen[3].

---

1) Vgl. W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 634 ff. und 654 ff.

2) Vgl. hierzu W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 228 ff.

3) Vgl. W.KRELLE, ebenda, S. 638/639.

Scheint insofern das Problem einer simultanen Planung von Produktionsprogramm, Preisen und Reklameeinsatz gelöst zu sein, so darf dennoch dabei nicht übersehen werden, daß durch eine solche Konzeption eine mit dem Reklamephänomen aufs engste verbundene Erscheinung aus der Betrachtung ausgeklammert wird, und zwar die Rückwirkung der Realisierung eines bestimmten Preis-, Mengen-, Reklameprogrammes in einem bestimmten Zeitpunkt auf die Nachfrageverhältnisse zu späteren Zeitpunkten. Während bei Unternehmungen, die sich als Mengenanpasser verhalten, und bei isolierter Planung des Produktionsprogrammes die Wirkung des Angebots bestimmter Produktartenmengen auf die Präferenzstruktur der Abnehmer der angebotenen Erzeugnisse unter Umständen noch vernachlässigt werden kann, ist es bei Betreiben von Preispolitik und darüber hinaus beim Einsatz von Reklame nahezu ausgeschlossen, die intertemporalen Kausalzusammenhänge zwischen Entscheidungs- und Erwartungsparametern zu vernachlässigen, wie dies bei einer statischen Betrachtungsweise geschieht. Denn daß sich eine Unternehmung, die im Zeitpunkt t ein bestimmtes Preis-, Produktions- und Reklameprogramm auf Grund einer bestimmten Nachfragesituation für ihre Produkte realisiert, auch im Zeitpunkt t+1 den gleichen Nachfragefunktionen für ihre Erzeugnisse gegenübersieht, ist eine Annahme, die nur in außerordentlich seltenen Ausnahmefällen realistisch sein kann. Hieraus folgt aber konsequenterweise, daß eine Behandlung des Problems der simultanen Preis-, Produktions- und Reklameplanung nur im Rahmen einer dynamischen Analyse möglich ist, was für uns bedeutet, daß mehrstufige Entscheidungsmodelle gebildet werden müssen, wenn die auf der Grundlage der Modellergebnisse getroffenen Entscheidungen im Sinne der angestrebten Zielsetzung optimal sein sollen; denn die unter dem Kriterium der Gewinnmaximierung über mehrere Perioden getroffenen Entscheidungen weichen in der Regel von den Entscheidungen für die kurze Periode ab.

So wird etwa ein zu hoher Preis für ein bestimmtes Erzeugnis in der ersten Periode zu einem Rückgang der Nachfrage nach diesem Produkt in der zweiten Periode führen, d.h. die Nachfragefunktion der zweiten Periode ist eine Transformation des Preises in der ersten Periode, die Anlaß dazu geben kann, daß die Unternehmung in der ersten Periode nicht den COURNOT'schen Preis der Periode 1 realisiert[1)2)], sondern einen solchen, der um soviel niedriger liegt, daß die Gewinnchancen der folgenden Perioden nicht gefährdet und der Gewinn über alle Perioden bis zum ökonomischen Horizont höher ist als die Summe der (einzelnen) Periodengewinne, die sich ergäben, wenn in jeder Periode der COURNOT'sche Preis verwirklicht worden wäre. Solche Zusammenhänge lassen sich aber ex definitione bei einer statischen Analyse und in einstufigen Modellen nicht berücksichtigen, sondern erfordern eine dynamische Betrachtungsweise, da wir es hier mit dem Ablauf eines Prozesses zu tun haben.

II. Die Behandlung des Problems der simultanen Planung von Preisen, Produktionsprogramm und Reklame als stochastischen Prozeß

1. Einführung von Risiko in das Problem der simultanen Bestimmung von Preisen, Produktionsprogramm und Reklameeinsatz

Eine Behandlung des Problems der simultanen Preis-, Mengen- und Reklameplanung als Ablauf eines Prozesses kann zwar wertvolle Aufschlüsse über die

---

1) Vgl. K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, a.a.O., S. 24.

2) K.FÖRSTNER und H.HENN (Dynamische Produktionstheorie und Lineare Programmierung, Meisenheim/Glan 1957) unterscheiden dementsprechend zwischen Gewinnmaximierung im großen und Gewinnmaximierung im kleinen, wenn der Gewinn jeder Periode einzeln maximiert werden soll.

intertemporalen Zusammenhänge der für die Bestimmung optimaler Preis-, Produktions- und Reklameprogramme relevanten ökonomischen Größen liefern. Sie bleibt aber solange ein reines Erklärungsmodell, wie nicht die tatsächlichen Verhältnisse im praktischen Wirtschaftsleben, die aber in aller Regel durch Ungewißheit über die Auswirkung von Entscheidungen, in unserem Fall durch Ungewißheit über die Auswirkung der Realisierung eines bestimmten Preis-, Produktions- und Reklameprogrammes auf die Präferenzstruktur der Abnehmer, gekennzeichnet sind, berücksichtigt werden.

Der Unternehmer weiß zwar, daß die Realisierung eines bestimmten Preis-, Mengen-, Reklameprogrammes die Nachfragekurven für seine Produkte verändert, über die tatsächlichen Auswirkungen besteht aber keine vollkommene Voraussicht, und zwar umso weniger, je weiter die Entscheidung in die Zukunft hineinragt. Dies liegt einmal daran, daß auf Grund von durch unzureichende Meßmethoden bedingten Beobachtungsfehlern oder auch Schätzfehlern keine genauen Informationen vorliegen, oder findet seine praktische Begründung oftmals auch darin, daß sich nicht alle für eine Entscheidung relevanten Größen berücksichtigen lassen, da die Erfassung aller Zusammenhänge einen nicht vertretbaren Aufwand erfordern würde. Aber auch wenn genügend Erfahrungswerte aus der Vergangenheit vorliegen sollten, so dürfen diese nur mit äußerster Vorsicht den Planungsüberlegungen zugrundegelegt werden, da sich im Zeitablauf die Präferenzstruktur der Abnehmer der von der Unternehmung angebotenen Güter geändert haben kann, und eine Zugrundelegung der Präferenzstrukturen für die gleichen oder verwandte Produkte aus der Vergangenheit zu schwerwiegenden Planungsfehlern führen kann[1]. Eine uneingeschränkte Verwendung von Vergangenheitswerten käme nur in

---

1) Vgl. W.KROMPHARDT, R.HENN, K.FÖRSTNER, Lineare Entscheidungsmodelle, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S. 305.

Frage, wenn von stationären Nachfrageverhältnissen ausgegangen werden könnte, was aber gleichzeitig auch die Stationarität von Einkommen, Einkommensverteilung, Konsum- bzw. Spar- und Investitionsneigung usw. implizieren würde, was aber nicht anzunehmen ist.

Wenn aber, wie gezeigt worden ist, sowohl eine statische als auch eine deterministische Behandlung der Frage nach dem optimalen Preis-, Produktions- und Reklameprogramm einer Unternehmung dem eigentlichen Problem nicht gerecht werden kann, und demzufolge nur durch mehrstufige Modelle unter Einbeziehung des Risikos, d.h. stochastische mehrstufige Modelle, eine problemadäquate Analyse zu erwarten ist, andererseits aber wiederum Daten aus der Vergangenheit, insbesondere objektive Wahrscheinlichkeiten nicht vorliegen oder nur unter Vorbehalt zu verwenden sind, taucht natürlich gerade hierbei die Frage auf, wie die Unternehmung in solchen Situationen überhaupt eine Entscheidung über ihr Preis-, Produktions- und Reklameprogramm treffen kann. Eine Lösung dieses Problems ist offenbar nur dann möglich, wenn dem Planungskalkül subjektive Wahrscheinlichkeiten zugrunde gelegt werden[1].

Da, wie bereits an anderer Stelle nachgewiesen werden konnte, die Information wirtschaftlicher Entscheidungssubjekte in aller Regel auch in diesem Falle durch subjektive Wahrscheinlichkeiten wiedergegeben werden kann, und sich zudem zeigen läßt, daß sich subjektive Wahrscheinlichkeiten durch geeignete Experimente auch in ihrem absoluten quantitativen Ausmaß beliebig genau einengen lassen[2], sind auch in dieser Hinsicht die theoretischen Grundlagen da-

---

1) Dieser Ansicht ist auch W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S.119.

2) Vgl. hierzu W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 613 und die dortige Literatur.

für gegeben, das Problem der Bestimmung optimaler Preis-, Produktions- und Reklameeinsatzprogramme als mehrstufiges stochastisches Entscheidungsmodell oder, genauer definiert, als stochastischen Prozeß aufzufassen und auf dieser Ebene auch einer praktischen Lösung zuzuführen. Bevor dies aber geschieht, soll zunächst kurz dargelegt werden, was allgemein unter einem stochastischen Prozeß verstanden wird.

2. Stochastische Prozesse

Ein stochastischer Prozeß läßt sich definieren als die mathematische Beschreibung eines Vorgangs, der während seines Verlaufs vom Zufall beeinflußt wird. Ein besonders häufiger Fall eines stochastischen Prozesses liegt dann vor, wenn eine bestimmte Variable, etwa z, nicht nur von der Zeit abhängt, sondern auch zufällig verteilt ist. Diese Variable kann gemäß einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung in jedem Zeitpunkt $t \in T$, wobei T einen bestimmten Zeitbereich oder den nichtnegativen Strahl der Zeitgeraden bezeichnen möge, verschiedene Werte annehmen, so daß z_t für jedes $t \in T$ eine Zufallsvariable ist, die, weil zur Beschreibung eines Zustandes oft mehrere reelle Zahlen benötigt werden, in der Regel mehrdimensional sein wird. Sind nun etwa für alle geordneten k-Tupel $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ von Werten (aus T) die k-dimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $(z_{t_1}, z_{t_2}, \ldots, z_{t_k})$ in einander konsistenter Weise gegeben, so ist ein stochastischer Prozeß vollständig beschrieben[1].

---

1) Vgl. W.EBERL, Stochastische Prozesse in der Regelungstheorie, in: Operations Research-Verfahren II (Herausg.: R.HENN), Meisenheim/Glan 1965, S. 162 ff., insbesondere S. 169; W.KROMPHARDT, R.HENN, K.FÖRSTNER, Lineare Entscheidungsmodelle. a.a.O., S. 336/337; E.PARZEN, Stochastic Processes, 2. Aufl., San Francisco-London-Amsterdam 1964, insbesondere S. 22 ff.; J.L.DOOB, Stochastic Processes, 5. Aufl., New York und London 1964, insbesondere S. 46 ff.

Zwar lassen sich durch stochastische Prozesse in dieser allgemeinen Form zahlreiche komplexe zufallsabhängige Abläufe beschreiben, eine numerische Lösung ist hingegen, insbesondere bei ökonomischen Problemen, nur möglich, wenn vereinfachende Annahmen über das Verhalten der relevanten Variablen getroffen werden. Eine solche vereinfachende Annahme ist bei stochastischen Prozessen das analytische System der MARKOFF-Prozesse, deren Eigenschaften die Entwicklung von auch in der Praxis anwendbaren Algorithmen erlauben[1].

3. Behandlung des Problems als MARKOFF-Prozeß

(a) MARKOFF-Prozesse

Unter einem MARKOFF-Prozeß versteht man eine spezielle Klasse von stochastischen Prozessen, die sich von anderen komplizierteren stochastischen Prozessen dadurch unterscheidet, daß die Wahrscheinlichkeiten eines Übergangs von einem Zustand i, etwa im Zeitpunkt t, in einen Zustand j im Zeitpunkt t+1 weder von der Zeit noch von der Zahl der Übergänge abhängen. Nehmen wir etwa an, daß ein System M verschiedener Zustände fähig sei, dann hängt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß während der nächsten Periode ein Übergang vom Zustand i in den Zustand j stattfindet, ausschließlich von i und j ab. Anders ausgedrückt, es lassen sich (bedingte) Wahrscheinlichkeiten p_{ij} dafür angeben, daß ein System, das sich im Zeitpunkt t im Zustand i befindet, im Zeitpunkt t+1 den Zustand j erreicht. Diese Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich in einer Übergangsmatrix

$$\mathfrak{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{M1} & \cdots & p_{MM} \end{bmatrix}$$

1) Vgl. H. WEDEKIND, a.a.O., S. 128.

zusammenfassen, die den MARKOFF-Prozeß dann vollständig beschreibt. Hierbei muß, da sich das System im nächsten Zeitpunkt notwendigerweise in einem der möglichen Zustände befindet, natürlich

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1$$

gelten. Da die p_{ij} Wahrscheinlichkeiten sind, muß selbstverständlich auch die Bedingung

$$0 \leq p_{ij} \leq 1$$

erfüllt sein[1].

(b) Die Modellvorstellung

Eine Mehrprodukt-Unternehmung möge sich für ihre Produkte konjekturalen Preis-Absatzfunktionen gegenübersehen[2]. Sie weiß, daß sie durch die Realisierung bestimmter Preis-, Mengen-, Reklameprogramme die Lagen der Nachfragekurven der von ihr angebotenen Produkte verändern wird, über die tatsächliche Veränderung bestehe aber keine vollkommene Voraussicht. Diese Nachfragekurven können dabei sehr verschiedene Gestalt haben, da es in der Praxis aber normalerweise kaum gelingen wird, mehr als eine lineare Approximation festzustellen[3], erscheint es

---

1) Vgl. hierzu vor allem W.FELLER, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 2. Aufl., New York und London 1961, S. 338 ff.; R.HOWARD, a.a.O., S. 3 ff.; F.FERSCHL, Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse, Wien und Würzburg 1964, S. 29/30; E.B.DYNKIN, Théorie des Processus Markoviens, Paris 1963, S. 23 ff.

2) Dies bedeutet nicht, daß unbedingt eine monopolistische Marktsituation vorliegen muß; die hier entwickelte Konzeption kann ohne weiteres auf den 'autonomen Bereich' der Preis-Absatzfunktion eines Oligopolisten oder Polypolisten übertragen werden und ist somit völlig unabhängig von einer bestimmten Marktform.

3) Vgl. W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 229.

sinnvoll, die Lage der Nachfragekurven für die einzelnen Produkte durch den Winkel, den sie mit der Abszisse bilden und den Ordinatenabschnitt zu messen. Bezeichnet man nun die auf diese Art gemessene Lage einer Nachfragefunktion als einen Zustand, so mag, wie man unmittelbar einsieht, die Preis-Absatzkurve für Produktart 1 eine ganze Reihe von Zuständen anzunehmen, ebenso diejenige für Produktart 2 usw. Selbstverständlich sind auch alle Kombinationen der Zustände für die zu betrachtenden Nachfragefunktionen möglich, was die Zahl der Zustände, die der von uns betrachtete stochastische Prozeß durchlaufen kann, sehr schnell auf eine Anzahl wachsen läßt, die nicht mehr mit einem in Hinblick auf die Zielsetzung der Unternehmung sinnvollen zeitlichen und finanziellen Aufwand zu bewältigen ist. Man wird deshalb nicht alle theoretisch möglichen Zustände betrachten, sondern nur solche, die von der Unternehmensleitung für praktisch relevant gehalten werden.

In jedem Zustand des Systems möge nun eine Anzahl von Alternativen möglich sein, die den Ablauf des Prozesses beeinflussen, wobei diese Entscheidungen nur zu diskreten, äquidistanten Zeitpunkten (etwa zu Beginn eines Monats) getroffen werden mögen. Zu Beginn irgendeiner Periode möge sich das System in einem der von der Unternehmensleitung für möglich gehaltenen Zustände befinden, etwa im Zustand i, $i = 1, 2, \ldots, M$, der die Lage der Nachfragekurven für die von der Unternehmung angebotenen Güter kennzeichnet. In diesem Zustand i sei nun eine Reihe von Alternativen möglich, d.h. in unserem speziellen Fall die Realisierung verschiedener Preis-, Produktions- und Reklameprogramme. Wie unmittelbar aus den Ausführungen über die Eigenschaften von MARKOFF-Prozessen hervorgeht, können für jede Entscheidung, welche die Unternehmung im Zustand i trifft, die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß das System in einen

anderen Zustand übergeht, verschiedene Werte annehmen. Die Unternehmung möchte nun zu Beginn der Periode k (k = 1, 2, ..., N) wissen, welche Kombination von Preisen, Produktionsprogramm und Reklameeinsatz sie in Abhängigkeit von N (der Anzahl der Perioden) und vom gegenwärtigen Zustand, d.h. der Lagen der Preis-Absatzfunktionen ihrer Erzeugnisse, für die nächste Periode (z.B. den nächsten Monat) wählen muß, um den gesamten erwarteten Gewinn für die betrachtete Planperiode von N Monaten zu maximieren.

Wir treffen nun folgende Übereinkunft: Das Annehmen verschiedener Zustände soll als diskreter Prozeß aufgefaßt und die Zeit zwischen zwei Zeitpunkten t und t+1 als eine Periode oder, wie es im folgenden geschieht, als eine Stufe des Prozesses bezeichnet werden.

Jedem Zustand i, i = 1, 2, ..., M, möge eine Menge von Entscheidungen

$$\mathfrak{N}_i = \langle e_i^1, e_i^2, \ldots, e_i^s, \ldots, e_i^z \rangle$$

zugeordnet sein, und weiterhin eine Übergangsmatrix

$$\mathfrak{P} = \left[p_{ij} (e_i^s) \right],$$

für deren Elemente

$$0 \leq p_{ij} (e_i^s) \leq 1 \qquad \begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, M \\ s = 1, 2, \ldots, z, \end{matrix}$$

und, entsprechend den Eigenschaften eines MARKOFF-Prozesses, selbstverständlich auch

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij} (e_i^s) = 1$$

gilt. Hierbei bedeutet $p_{ij}(e_i^s)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System in den Zustand j übergeht, wenn es sich auf der vorhergehenden Stufe des

Prozesses im Zustand i befindet und dort die Entscheidung e_i^s gefällt wird.

Bisher ist zwar eine Aussage über das Verhalten des Prozesses getroffen worden, aber noch keine für die Lösung ökonomischer Probleme allein entscheidende Bewertung erfolgt. Wir führen deshalb eine Gewinnmatrix

$$\mathfrak{G}_i = \left[g_{ij} \left(e_i^s\right) \right]$$

ein, wobei $g_{ij}\ (e_i^s)$ denjenigen Gewinn bezeichnet, der entsteht, wenn im Zustand i die Entscheidung e_i^s getroffen wird und das System von i nach j übergeht[1]. Der von uns betrachtete bewertete stochastische Prozeß ist somit durch

1. die verschiedenen möglichen Zustände,
2. die möglichen Entscheidungen in jedem Zustand,
3. die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten und
4. die Matrix der Gewinne

gekennzeichnet und somit hinreichend definiert.

Bestimmend für das angestrebte Ziel der Unternehmung, den Erwartungswert des Gewinnes über den N Perioden (bzw. Stufen) umfassenden gesamten Prozeß zu maximieren, sind offenbar neben den stochastischen Einflüssen die Entscheidungen, die auf den einzelnen Stufen getroffen werden. Da sich der Prozeß zu Beginn einer Periode (bzw. Stufe) als Folge des Einflusses einer bestimmten stochastischen Gesetzmäßigkeit und der in der vorhergehenden Periode gefällten Entscheidung notwendigerweise in einem der möglichen Zustände befinden muß, besteht das für eine Unternehmung entscheidende Problem darin, für jeden dieser möglichen Zustände eine solche Entscheidung zu treffen, die das angestrebte Ziel der Maximierung des Erwartungswertes des Gewinnes über alle N Perioden zu erreichen

1) Vgl. hierzu vor allem D.ZSCHOCKE, a.a.O., S. 118/119.

erlaubt. Eine solche zum Zustand i gehörende Entscheidung soll als e_i^{opt} bezeichnet werden.

Definiert man weiterhin einen Vektor

$$\lambda_k' = \langle e_1^{opt}, e_2^{opt}, \ldots, e_M^{opt} \rangle,$$

der als Komponenten alle optimalen auf der Stufe k im Zustand i getroffenen Entscheidungen enthält, dann besteht das Entscheidungsproblem, dem sich die Unternehmung gegenübersieht, doch offenbar darin, alle N (Anzahl der Stufen) Vektoren

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$$

zu bestimmen, was praktisch bedeutet, daß damit das optimale Verhalten zur Maximierung des Erwartungswertes des Gewinnes über den gesamten Prozeß festgelegt ist.

Nehmen wir etwa an, der von uns betrachtete über N Perioden laufende Prozeß sei zu Beginn der k-ten Periode im Zustand i angelangt, und bezeichnen mit $EG^i_{N-(k-1)}$ den maximalen Erwartungswert des Gewinnes des noch verbleibenden Prozesses (d.h. eines Prozesses mit N-(k-1) Stufen), so folgt durch Analogieschluß zum BELLMAN'schen Optimalitätsprinzip, daß offenbar

$$(83)\quad EG^i_{N-(k-1)} = \max_{e_i^s} \left\{ \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\,(e_i^s) \left[g_{ij}\,(e_i^s) + EG^j_{N-k} \right] \right\}$$

$$i = 1, 2, \ldots, M,$$
$$s = 1, 2, \ldots, z,$$

gelten muß.

Setzt man vereinfachend für $\sum_{j=1}^{M} p_{ij}\,(e_i^s)\, g_{ij}\,(e_i^s)$, d.h. für den erwarteten Gewinn für eine Stufe[1)]

1) Vgl. R.HOWARD, a.a.O., S. 19.

$$(84)\quad f_i(e_i^s) = \sum_{j=1}^{M} p_{ij}(e_i^s)\, g_{ij}(e_i^s),$$

dann ergibt sich für (83)

$$(83)'\quad EG^i_{N-(k-1)} = \max_{e_i^s} \left\{ f_i(e_i^s) + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}(e_i^s)\, EG^j_{N-k} \right\},$$

$$k = 1, 2, \ldots, N,$$
$$i = 1, 2, \ldots, M,$$

was praktisch nichts anderes darstellt als das auf den Fall eines stochastischen mehrstufigen Entscheidungsmodelles angewandte BELLMAN'sche Optimalitätsprinzip: Daß nämlich von allen Entscheidungen, die im Zustand i möglich sind, diejenige die optimale ist, welche die Summe aus dem erwarteten Gewinn einer Stufe und dem erwarteten Gewinn des dadurch eindeutig festgelegten Restprozesses maximiert[1].

(c) Hinweise auf Lösungsverfahren

Die bisher entwickelte Modellkonzeption hat trotz der theoretischen Bedeutung, die ihr für die Lösung des Problems der simultanen Planung von Preisen, Produktionsprogramm und Reklameeinsatz zukommt - eines Problems, das, wie wir gezeigt haben, als Ablauf eines stochastischen Prozesses behandelt werden kann - den für die praktische Lösung dieser Frage schwerwiegenden Nachteil, daß mit endlichen MARKOFF-Prozessen gearbeitet wurde. Denn einmal ist hierbei, auch wenn wir uns bemühen würden, einen Prozeß längerer Dauer in dieser Weise zu behandeln, das Konvergenzverhalten gegen die beste Strategie in jedem der möglichen Zustände asymptotisch und somit analytisch außerordentlich schwer zu bestimmen, und zum anderen ist es in den meisten im prak-

1) Vgl. R.HOWARD, a.a.O., S. 18 ff.; D.ZSCHOCKE, a.a.O., S. 118/119; H.v.FALKENHAUSEN, Der Howard Algorithmus in Dynamic Programming, Prinzip und praktische Anwendung, in: Ablauf- und Planungsforschung (4) 1963, S. 183 ff.; K.ELSNER, a.a.O., S. 147/148.

tischen Wirtschaftsleben vorkommenden Situationen gar nicht möglich, eine exakte Aussage über die Beendigung eines ökonomischen Prozesses zu treffen. Aus diesem Grunde erscheint es sinnvoll, nicht mit einer genau festgelegten Anzahl von Übergängen, sondern stattdessen mit sehr vielen, im theoretischen Grenzfall mit einer unendlich großen Anzahl von Übergängen zu rechnen. Das hat aber zur Konsequenz, daß als Entscheidungskriterium nicht der Erwartungswert des Gewinnes über den gesamten Prozeß, sondern ein durchschnittlich, d.h. pro Periode zu erwartender Gewinn maximiert werden muß[1].

Zur Optimierung solcher MARKOFF-Prozesse mit unendlich vielen Stufen sind vor allem die Algorithmen von P.WOLFE und G.B.DANTZIG[2] und der HOWARD-Algorithmus[3] bekannt geworden. Beide Algorithmen weisen dabei bezüglich der praktischen Bestimmung numerischer Lösungen gewisse Vor- und Nachteile auf, von denen die wesentlichsten hier aufgezeigt werden sollen. Zuvor sollen jedoch die Konzeption und das generelle Vorgehen des HOWARD- und des WOLFE-DANTZIG'schen Algorithmus kurz dargestellt werden.

(c_1) Der HOWARD-Algorithmus

Zur Darstellung dieses Verfahrens[4] soll ein bewerteter MARKOFF-Prozeß mit M Zuständen betrachtet werden, der durch die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathfrak{P}$ und eine Gewinnmatrix $\mathfrak{q}$ beschrieben sei.

---

1) Vgl. R.HOWARD, a.a.O., S. 31; D.ZSCHOCKE, a.a.O., S. 132.

2) P.WOLFE und G.B.DANTZIG, Linear Programming in a Markov Chain, in: Op. Res. (10) 1962, S. 702 ff.

3) R.HOWARD, a.a.O., S. 32 ff.

4) Vgl. R.HOWARD, a.a.O., S. 32 ff.; D.ZSCHOCKE, a.a.O., S. 122/123; K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, a.a.O., S. 145.

Bezeichnet man nun mit EG_N^i den Erwartungswert des Gewinnes eines N-stufigen Prozesses, der im Zustand i beginnt, dann gilt, wenn im Zustand i zu Beginn jeder Periode (Stufe) die gleiche Entscheidung, etwa $\tilde{e}_i$ gefällt wird, wegen (83)' offenbar

$$(85)\quad EG_N^i = f_i(\tilde{e}_i) + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}(\tilde{e}_i)\, EG_{N-1}^j(\tilde{e}_i).$$

Da im folgenden immer von der Voraussetzung ausgegangen wird, daß auf jeder Stufe im Zustand i immer die gleiche Entscheidung getroffen wird, kann vereinfachend für (85) auch

$$(85)'\quad EG_N^i = f_i + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\, EG_{N-1}^j$$

geschrieben werden. Für sehr große N existiert aber unter gewissen Voraussetzungen, auf die hier nicht näher eingegangen zu werden braucht[1], der Grenzwert

$$(86)\quad \lim_{N\to\infty} \frac{EG_N^i}{N} = g^i.$$

EG_N^i läßt sich also für sehr große N auch durch

$$(85)''\quad EG_N^i = g^i \cdot N + a^i$$

angeben, wobei a^i den 'Startwert' und $g^i \cdot N$ den stationären Teil der Gewinnfolge EG_N^i bezeichnet, wodurch das Verhalten von EG_N^i charakterisiert wird[2]. Für ergodische[3] bewertete MARKOFF-Prozesse ist aber

$$(87)\quad g^i = g,$$

so daß gemäß (85)' und (85)''

$$(88)\quad EG_N^i = g \cdot N + a^i = f_i + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\, EG_{N-1}^j$$

gilt.

---

1) Siehe hierzu etwa R.BELLMAN und ST.DREYFUS, a.a.O., S. 301.

2) Vgl. D.ZSCHOCKE, a.a.O., S. 122; K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, a.a.O., S. 151/152.

3) Zur Definition vgl. etwa L.TAKÁCS, Stochastic Processes, 2. Aufl., New York und London 1962, S. 15/16 und 23/24.

Über

$$gN + a^i = f_i + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\left[(N-1)\, g + a^j\right]$$

$$= f_i + (N-1)\, g \sum_{j=1}^{M} p_{ij} + a^j \sum_{j=1}^{M} p_{ij},$$

und wegen

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1$$

und

$$gN + a^i = f_i + Ng - g \sum_{j=1}^{M} p_{ij} + a^j \sum_{j=1}^{M} p_{ij}$$

ergibt sich dann

$$(89)\quad g + a^i = f_i + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\, a^j \quad (i = 1, 2, \ldots, M)^{1)}.$$

Das System (89) enthält M Gleichungen und (M+1) Unbekannte, nämlich g und die M a^i. Wir haben also mindestens einen Freiheitsgrad. Es wird nun ein beliebiges a^i, etwa $a^M = 0$ gesetzt, und das System kann für g und die noch verbleibenden a^i $(i = 1, 2, \ldots, M-1)$ gelöst werden.

Im zweiten Schritt der Iteration werden die a^i-Werte in das System (89) oder

$$(89)'\quad g + a^i = f_i\,(e_i^s) + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\,(e_i^s)\, a^j,$$

$$i = 1, 2, \ldots, M,$$

$$s = 1, 2, \ldots, z,$$

eingesetzt, und für jeden Zustand i ist dann diejenige Alternative e_i^s auszuwählen, die den Ausdruck (89)' maximiert; hierdurch wird dann $\hat{e}_i^s$ eine neue Entscheidung für den i-ten Zustand. Die auf diese Weise vorgenommene Iteration wird mit den sich ergebenden neuen Übergangs- und Gewinnmatrizen solange wiederholt, bis keine weitere Alternative einen größeren Gewinn aufweist. Der optimale Wert von g ist dann erreicht, wenn in zwei aufeinanderfolgenden

1) Vgl. R.HOWARD, a.a.O., S. 34/35; D.ZSCHOCKE, a.a.O., S. 123.

Iterationen die gleiche Alternative ermittelt wird[1]. HOWARD kann zeigen, daß der von ihm entwickelte Algorithmus in einer endlichen Anzahl von Schritten konvergiert; auf den Konvergenzbeweis, der leicht zu geben ist, braucht hier aber nicht näher eingegangen zu werden[2].

(c_2) Der Algorithmus von WOLFE und DANTZIG

Bei der Darstellung dieses Verfahrens[3] können wir uns kurz fassen, da die bisherigen Ausführungen über bewertete ergodische MARKOFF-Prozesse analog gelten. Für den von uns beabsichtigten kurzen Vergleich der praktischen Effizienz der beiden Verfahren interessiert hier vor allem die Tatsache, daß grundsätzlich auch die Möglichkeit besteht, das Problem der Optimierung eines MARKOFF-Prozesses als lineare Programmierungsaufgabe zu formulieren und als solche zu lösen, worauf auch schon A.S.MANNE[4] hingewiesen hat. Während aber der praktische Anwendungsbereich des Verfahrens von MANNE auf Spezialfälle beschränkt ist, gelingt WOLFE und DANTZIG durch eine Formulierung des Problems als Minimumaufgabe die Umgehung der bei einer Behandlung als Maximumproblem nicht zu lösenden Schwierigkeit, nämlich sicherzustellen, daß sich in der Basislösung des linearen Programms für jeden Zustand nur eine Alternative befindet. Die praktische Bedeutung dieses Verfahrens, weswegen es hier erwähnt worden ist, liegt vor allem in der Tatsache, daß es möglich ist, die Simplex-Methode, und zwar in ihrer revidierten Form, für die numerische Lösung eines mehrstufigen stochastischen Problems anzuwenden.[5]

---

1) Vgl. R.HOWARD, a.a.O., S. 37 ff.; K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, a.a.O., S. 153.

2) Siehe hierzu vor allem R.HOWARD, a.a.O., S. 42/43.

3) Vgl. P.WOLFE und G.B.DANTZIG, a.a.O., S. 704.

4) A.S.MANNE, Linear Programming and Sequential Decisions, in: Man. Sci. (6) 1960, S. 259 ff.

5) Vgl. P.WOLFE und G.B.DANTZIG, a.a.O., S. 705/706; H.WEDEKIND, a.a.O., S. 139 ff.

(c_3) Kurzer Vergleich der praktischen Effizienz der beiden Verfahren

Da bei dem Verfahren von WOLFE und DANTZIG im Gegensatz zum HOWARD-Algorithmus mit der im allgemeinen für die Lösung praktischer Programmierungsprobleme recht effizienten Simplex-Methode gearbeitet wird, liegt es nahe, kurz die Vor- und Nachteile dieser beiden unterschiedlichen Arten des Vorgehens bei der Lösung bewerteter ergodischer MARKOFF-Prozesse gegenüberzustellen. Hierbei sollen allein praktische Gesichtspunkte maßgebend sein, und die Verallgemeinerungsfähigkeit der Methode von WOLFE und DANTZIG, insbesondere durch eine Anwendung des für die Lösung umfangreicher linearer Programme oft bedeutsamen Dekompositions-Prinzips[1] braucht, weil für das von uns betrachtete Problem nicht relevant, nicht berücksichtigt zu werden.

Zunächst kann festgestellt werden, daß im Gegensatz zum Verfahren von WOLFE und DANTZIG das Optimalitätskriterium beim HOWARD-Algorithmus schlechter ist, weil hier nach Erreichen der Optimallösung noch eine weitere Iteration durchgeführt werden muß, um das Vorliegen des Optimums zu bestätigen, während bei Anwendung der Simplex-Methode das Kriterium für das Auffinden eines Optimums immer eindeutig ist[2]. Dem steht aber ein besonders schwerwiegender Nachteil des Algorithmus von WOLFE und DANTZIG gegenüber. Denn das von ihnen betrachtete Problem eines MARKOFF-Prozesses ist im allgemeinen in starkem Maße degeneriert[3], so daß bei der Lösung praktischer Probleme

---

1) Siehe hierzu G.B.DANTZIG und P.WOLFE, Decomposition Principle for Linear Programs, in: Op. Res. (8) 1960, S. 101 ff.

2) Vgl. H.WEDEKIND, a.a.O., S. 135.

3) Notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorliegen von Nichtdegeneration bei linearen Programmen, etwa von der Form (1), (2) und (3), ist bekanntlich die lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren in der um die Einheitsmatrix und den Begrenzungsvektor erweiterten Koeffizientenmatrix.

vor allem die Perturbations-Methode[1] angewandt werden, die eine beachtliche Speicherkapazität erfordert, wozu noch die wesentlich schlechtere Konvergenz des WOLFE und DANTZIG'schen Algorithmus im Falle der Degeneration hinzutritt[2].

Wegen dieser praktischen Überlegenheit des HOWARD-Algorithmus zur Lösung mehrstufiger stochastischer Entscheidungsprobleme erscheint es angebracht, das nun folgende Beispiel zur Bestimmung optimaler Preis-, Produktions- und Reklameprogramme mit Hilfe des von HOWARD entwickelten Verfahrens durchzurechnen.

4. Durchrechnung eines Beispiels mit dem HOWARD-Algorithmus

(a) Übersicht über die Daten des Problems

Als Beispiel betrachten wir den einfachsten Fall einer Mehrprodukt-Unternehmung, d.h. eine Unternehmung, die nur zwei Produkte herstellt und auf dem Markt anbietet. Diese Unternehmung möge sich für ihre Produkte konjekturalen Preis-Absatzfunktionen gegenübersehen[3], die auf Grund statistischer Erhebungen der Unternehmensleitung bekannt seien und sich durch

(90) $p_1 = 12 - 2x_1 + 0{,}5x_2$ (für Produktart I)

und

(91) $p_2 = 21 - 2x_2 + 0{,}5x_1$ (für Produktart II)

angeben lassen. Wie man auf Grund der Form der Nachfragefunktionen unmittelbar erkennt, wird hier angenommen, daß es sich um komplementäre Güter handelt.

---

1) Vgl. hierzu etwa G.B.DANTZIG, Linear Programming and Extensions, a.a.O., S.231 ff.

2) Vgl. H.WEDEKIND, a.a.O., S. 135.

3) Die folgenden Überlegungen sind nicht an eine bestimmte Marktform gebunden und lassen sich analog auf alle praktisch relevanten Marktsituationen übertragen.

Für die Erlöse der beiden betrachteten Produktarten ergibt sich dann:

(92) $E_1 = (12 - 2x_1 + 0{,}5x_2)\, x_1$ (für Produktart I)

$= 12x_1 - 2x_1^2 + 0{,}5x_1x_2$

und

(93) $E_2 = (21 - 2x_2 + 0{,}5x_1)\, x_2$ (für Produktart II)

$= 21x_2 - 2x_2^2 + 0{,}5x_1x_2.$

Die Produktionskostenfunktionen seien der Unternehmung ebenfalls bekannt und mögen für Produktart I

(94) $K_1 = 10 + 2x_1$

und für Produktart II

(95) $K_2 = 25 + x_2$

lauten.

Für die Gewinnfunktionen für die beiden Produktarten ergibt sich dann

(96) $G_1 (x_1, x_2) = (E_1 - K_1)$

$= 12x_1 - 2x_1^2 + 0{,}5x_1x_2 - (10 + 2x_1)$

$= 10x_1 - 2x_1^2 + 0{,}5x_1x_2 - 10$

und

(97) $G_2 (x_1, x_2) = (E_2 - K_2)$

$= 21x_2 - 2x_2^2 + 0{,}5x_1x_2 - (25 + x_2)$

$= 20x_2 - 2x_2^2 + 0{,}5x_1x_2 - 25.$

Für $G (x_1, x_2)$ als Summe von (96) und (97) folgt dann

(98) $G (x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 - 35.$

Die Produktion der beiden Produkte unterliege bestimmten fertigungstechnischen Beschränkungen, und zwar möge ein Aggregat I, das nur beschränkt mit

10 Maschinenstunden pro Planperiode zur Verfügung steht, von beiden Produkten gemeinsam genutzt werden, während ein weiteres Aggregat II, dessen Kapazität 8 Maschinenstunden betrage, nur von Produktart II durchlaufen wird. Weiterhin soll angenommen werden, daß für die Erzeugung einer Mengeneinheit von Produktart I bzw. Produktart II jeweils eine Maschinenstunde benötigt werde.

An Reklame (in dem von uns verstandenen weiten Sinne) werde von der Unternehmung nur eine Erinnerungswerbung für notwendig gehalten, die für beide Produkte gemeinsam durchgeführt wird, wobei die Unternehmung gerade so viel an Werbung aufwendet, wie notwendig ist, um den 'unteren Schwellenwert der Fühlbarkeit'[1] bei den Abnehmern der von der Unternehmung angebotenen Güter zu überschreiten. Diese Reklamekosten mögen 5 Geldeinheiten betragen und von der Unternehmung als fix angesehen werden.

Das hier beschriebene Problem stellt sich nun in der Form

$$(99)\quad G(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 - (35+5) \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

unter Beachtung der Kapazitätsbeschränkungen

$$(100)\quad x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_2 \leq 8$$

und der (ökonomisch allein sinnvollen) Nicht-Negativitätsbedingung

$$(101)\quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Hiermit liegt eine quadratische Programmierungsaufgabe vor, wie eine Schreibweise in der Form (ohne Berücksichtigung des konstanten Gliedes)

$$(102)\quad c'u + \tfrac{1}{2}u'Du \stackrel{!}{=} \text{Max.}$$

---

1) Vgl. W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 204.

(103) $\mathcal{A}\,\mathcal{y} \leq \mathcal{b}$

(104) $\mathcal{y} \geq \mathcal{o}$

mit

$$\mathcal{c}' = \langle 10,\ 20\rangle\ ,$$

$$\mathcal{y}' = \langle x_1,\ x_2\rangle\ ,$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{b}' = \langle 10,\ 8\rangle\ ,$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathcal{o} = \langle 0,\ 0\rangle$$

unmittelbar erkennen läßt.

Wie man leicht nachprüft, ergibt sich als optimale Lösung[1)]

für $x_1 = 4$

und

für $x_2 = 6$ Mengeneinheiten;

die hierzu gehörenden optimalen Preise sind

$p_1 = 7$

und

$p_2 = 11$ Geldeinheiten.

Für den Gewinn ergibt sich dann aus (99) unter Berücksichtigung der fixen Kosten

$G(x_1, x_2) = 40$ Geldeinheiten.

Dieses durch die Realisierung der COURNOT'schen Mengen und Preise und ein Minimum an Reklame gekennzeichnete Preis-, Mengen-, Reklameprogramm der von uns betrachteten Zwei-Produkt-Unternehmung führt aber nur dann zu einem Gewinn von 40 Geldeinheiten (etwa gemessen in Tsd. DM) pro Rechnungsperiode (etwa pro Monat), wenn von stationären Nachfrage-

1) Es wurde der WOLFE'sche Algorithmus angewandt.

verhältnissen ausgegangen werden kann, d.h. wenn die Unternehmung sich am Ende des 1. Monats (bzw. zu Beginn des 2. Monats) noch derselben durch (90) und (91) beschriebenen Lage der Nachfragefunktionen für ihre beiden Produkte gegenübersieht. Anders ausgedrückt: Bezeichnet man die durch (90) und (91) gekennzeichnete Nachfragesituation als einen Zustand i, dann wird ein Gewinn von 40 Geldeinheiten nur unter der Voraussetzung erreicht, daß die Unternehmung auch zum Ende der betrachteten (bzw. zu Beginn der folgenden) Rechnungsperiode sich wiederum dem Zustand i gegenübersieht.

Da aber, wie wir gezeigt haben, nur in seltenen Ausnahmefällen von stationären Nachfrageverhältnissen ausgegangen werden kann, und zudem im praktischen Wirtschaftsleben über die Auswirkungen einer Entscheidung, in diesem Falle über die Realisierung eines bestimmten Preis-, Mengen- und Reklameprogramms Ungewißheit besteht, kann sich die Unternehmung aber auch zu Beginn der folgenden Rechnungsperiode anderen Lagen der Nachfragekurven für ihre Produkte gegenübersehen.

Aus Gründen der Vereinfachung und der größeren Klarheit der Darstellung möge nun angenommen werden, daß die Unternehmung nur noch eine weitere Lage der Nachfragekurven für ihre Produkte für möglich halte, die etwa durch eine Parallelverschiebung der Preis-Absatzkurven zum Koordinatenursprung gekennzeichnet sei. Diese Lage der Nachfragekurven für die von der Unternehmung angebotenen Produkte soll im folgenden als Zustand j bezeichnet werden. Da aber eine Parallelverschiebung der Preis-Absatzfunktionen zum Koordinatenursprung nichts anderes bedeutet, als daß sich die Nachfragesituation für die Unternehmung verschlechtert hat, möge für den Fall, daß sich die Nachfrageverhältnisse im Verlauf der ersten Rechnungs-

periode in die für die Unternehmung ungünstigere Situation verändert haben, nur noch ein Gewinn von 20 Geldeinheiten entstehen.

Die Unternehmung möge es nun auf Grund verschiedener Faktoren, wie etwa Verärgerung der Kunden durch hohe Preise und geringe Angebotsmengen, Übergehen der Kunden auf Substitute, Auftreten von durch die hohen Gewinne der Unternehmung angelockten Konkurrenzunternehmungen usw., für 'recht unwahrscheinlich' halten, daß sie sich bei Realisierung des durch die COURNOT'schen Preise und Mengen und ein Minimum an Reklameaufwendungen gekennzeichneten Programmes im Zeitpunkt t auch noch im Zeitpunkt t+1 (etwa zu Beginn des nächsten Monats) derselben Nachfragesituation gegenübersieht. Dieser Überlegung, daß der Eintritt eines solchen Falles 'recht unwahrscheinlich' ist, entspricht in etwa eine subjektive Wahrscheinlichkeit von 0,1 - 0,3[1)], sie soll hier mit 0,2 angenommen werden. Auf der anderen Seite halte es die Unternehmung für 'recht wahrscheinlich' (subjektive Wahrscheinlichkeit von 0,8), daß sich die Nachfrageverhältnisse während der ersten Periode verschlechtern, so daß sie sich zu Beginn der folgenden Periode der anderen für möglich gehaltenen Lage der Preis-Absatzfunktionen gegenübersieht, d.h. im Zustand j befindet.

Die Realisierung des Programmes mit COURNOT'schen Preisen und Mengen und einem Minimum an Reklameaufwand ist aber nur eine der Möglichkeiten, die der Unternehmung offenstehen. Überlegungen über die möglichen Auswirkungen der Realisierung eines bestimmten Programmes und der Versuch, dem Phänomen der Ungewißheit Rechnung zu tragen, werden dazu führen, auch andere Preis-, Mengen- und Reklameprogramme in

---

1) Vgl. hierzu und im folgenden die Tabelle bei W.KRELLE, Preistheorie, a.a.O., S. 611.

den Planungskalkül einzubeziehen. So können etwa aus dem Gesichtspunkt der Ungewißheit heraus die Preise unter die COURNOT'schen gesetzt werden, es können die Werbung und/oder andere Reklamefaktoren in verstärktem Maße eingesetzt werden, Maßnahmen, die, weil sie eine Abweichung vom (kurzfristigen) Optimum darstellen, notwendigerweise immer zu einer Minderung des (kurzfristigen) Gewinnes führen werden.

Theoretisch ist auch hier eine außerordentlich große Anzahl von Preis-, Mengen- und Reklamefaktorkombinationen möglich; aus Gründen der Übersichtlichkeit des Beispiels möge jedoch hier angenommen werden, daß insgesamt auf Grund der durch (90) und (91) charakterisierten Nachfragesituationen nur drei mögliche Preis-, Produktions- und Reklameprogramme in Betracht gezogen zu werden brauchen.

Die Unternehmung überlege sich etwa, daß durch den vermehrten Einsatz von Werbung und den Aufbau einer Vertreterorganisation einem Rückgang der Nachfrage, der sich in unserem Beispiel als eine Parallelverschiebung der beiden Preis-Absatzfunktionen nach links äußern soll, entgegengewirkt werden kann, was zusätzlich 10 Geldeinheiten kosten möge. Der Gewinn wird hierdurch auf 30 Geldeinheiten reduziert. Auf Grund der Intensivierung der Werbung und des Aufbaus einer Vertreterorganisation halte es die Unternehmung aber dann für 'immerhin möglich' (subjektive Wahrscheinlichkeit von 0,4), daß kein Rückgang der Nachfrage eintritt und sie sich auch noch zu Beginn der folgenden Rechnungsperiode der gleichen durch (90) und (91) beschriebenen Nachfragesituation gegenübersieht. Aber auch bei dieser Erhöhung des Reklameeinsatzes um 10 Geldeinheiten kann die Unternehmung nicht vollständig damit rechnen, den Nachfragerückgang aufzuhalten; sie halte es vielmehr immer noch für 'sehr möglich' (subjektive Wahrscheinlich-

keit von 0,6), daß sie sich zu Beginn des nächsten Monats der (für sie) schlechteren Nachfragesituation gegenübersieht. Sollte dieser Fall eintreten, dann möge nur noch ein Gewinn von 15 Geldeinheiten anfallen.

Als weitere Möglichkeit, auf die Präferenzstruktur der Nachfrage einzuwirken, möge die Unternehmung zusätzlich noch Produktgestaltung betreiben können, was weitere 10 Geldeinheiten kosten soll; der Gewinn wird somit auf 20 Geldeinheiten reduziert. Die Unternehmung mißt aber gerade dem Einsatz dieses Reklamefaktors (in dem von uns verstandenen erweiterten Sinne) besondere Bedeutung zu und hält es für 'recht wahrscheinlich' (subjektive Wahrscheinlichkeit von 0,8), daß sie dem Nachfragerückgang entgegenwirken kann und sich auch noch zu Beginn der nächsten Periode den gleichen Nachfragefunktionen für ihre beiden Produkte gegenübersieht. Immerhin kann sie auch durch diesen vermehrten Einsatz von Reklamefaktoren nicht ausschließen, daß ein Nachfragerückgang eintritt, sie möge den Eintritt dieses Ereignisses aber für 'recht unwahrscheinlich' (subjektive Wahrscheinlichkeit von 0,2) halten. Sollte dennoch im Verlauf der ersten Periode eine Verschiebung der Nachfrage-Kurven eintreten, so möge nur noch ein Gewinn von 10 Geldeinheiten anfallen.

Obwohl sie es für 'recht unwahrscheinlich' hält, kann die Unternehmung auch bei Realisierung des dritten hier im Beispiel betrachteten Programmes keinesfalls die Möglichkeit ausschließen, daß sie sich zu Beginn der nächsten Periode in dem für sie ungünstigeren Zustand befindet. Auch in diesem Zustand sind wiederum eine ganze Reihe von Preis-, Mengen- und Reklamefaktorartenkombinationen möglich, interessant für die Unternehmung sind aber offenbar nur diejenigen, die es der Unternehmung gestatten, wieder in den für sie günstigeren Zustand zurückzu-

kommen[1]. Für die Zwecke des hier betrachteten Beispiels reicht es aus, anzunehmen, daß der Unternehmung auch in diesem Zustand nur drei Alternativen offenstehen. Eine Beeinflussung der Nachfrage dahingehend, daß sich die Unternehmung zu Beginn der folgenden Periode wieder in dem für sie günstigeren Zustand befindet, ist offenbar nur durch eine entsprechende Preis- und Mengenpolitik und/oder einen verstärkten Reklameeinsatz möglich, was den Gewinn natürlich weiter reduziert. Realisiert die Unternehmung die erste der ihr offenstehenden drei Alternativen, dann möge für den Fall, daß sich die Nachfrage positiv beeinflussen läßt und sich die Unternehmung zu Beginn der folgenden Periode (etwa des nächsten Monats) wieder in der durch die Lage von (90) und (91) gekennzeichneten Situation befindet, ein Gewinn von 15 Geldeinheiten entstehen; diese Möglichkeit möge aber von der Unternehmung für 'unwahrscheinlich' (subjektive Wahrscheinlichkeit von 0,3) gehalten werden, sie halte es vielmehr für 'recht wahrscheinlich' (subjektive Wahrscheinlichkeit von 0,7), daß es durch eine Realisierung dieses Programmes nicht möglich ist, die Nachfrage in einem für die Unternehmung positiven Sinne zu beeinflussen. Verharrt die Unternehmung aber in diesem für sie ungünstigeren Zustand, dann möge ein Verlust von 5 Geldeinheiten pro Rechnungsperiode entstehen.

Bei Realisierung der zweiten Alternative möge die Unternehmung sowohl die Möglichkeit einer positiven Beeinflussung der Nachfrage als auch den Fall, daß ihr dieses nicht gelingt, für 'durchaus möglich' (subjektive Wahrscheinlichkeit von 0,5) halten; der Gewinn möge sich hierbei auf 10 Geldeinheiten belaufen, der entsprechende Verlust soll ebenfalls 10

---

1) Siehe hierzu auch die Probleme des Taxichauffeurs und des Spielzeugfabrikanten bei R.HOWARD, a.a.O., S. 27 ff. und 44 ff.

Geldeinheiten betragen. Erhöht die Unternehmung weiterhin ihre Anstrengungen, auf die Präferenzstruktur der Abnehmer einzuwirken, dann ist es zwar 'sehr wahrscheinlich' (subjektive Wahrscheinlichkeit von 0,9), daß sie sich zu Beginn der nächsten Periode wieder der durch (90) und (91) gekennzeichneten (günstigeren) Nachfragesituation gegenübersieht, der Gewinn bei Eintritt dieses Falles ist dann aber auf 5 Geldeinheiten zusammengeschmolzen. Auf Grund der Ungewißheit über die Auswirkung der Realisierung eines bestimmten Preis-, Mengen-, Reklameprogrammes besteht aber auch hier immer noch die Möglichkeit, im ungünstigeren Zustand zu verharren, was zu einem Verlust von 50 Geldeinheiten pro Rechnungsperiode führen soll; dieser Fall wird aber von der Unternehmung für 'sehr unwahrscheinlich' (subjektive Wahrscheinlichkeit von 0,1) gehalten. Die folgende Tabelle gibt noch einmal einen Überblick über die diesbezüglichen Daten des von uns als Beispiel betrachteten Problems:[1)]

Zustände	Alternative Preis-, Produktions- und Reklameprogramme	Wahrscheinlichkeiten	Gewinne	Erwartete Gewinne der ersten Periode
i	(e_i^s)	p_{ij}	g_{ij}	$f_i = \sum_{j=1}^{M} p_{ij} g_{ij}$
I	e_1^1	0,2 0,8	40 20	24
	e_1^2	0,4 0,6	30 15	21
	e_1^3	0,8 0,2	20 10	18
II	e_2^1	0,3 0,7	15 -5	1
	e_2^2	0,5 0,5	10 -10	0
	e_2^3	0,9 0,1	5 -50	-0,5

1) Ein (produktionstechnisches) Beispiel zum HOWARD-Algorithmus findet sich auch bei K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie, a.a.O., S. 152 ff.

Für die von uns in diesem Beispiel betrachtete Zwei-Produkt-Unternehmung, die sich für ihre Produkte zu Beginn der ersten Periode den Preis-Absatzfunktionen (90) und (91) gegenübersieht, erhebt sich nun die Frage, welches der möglichen Preis-, Produktions- und Reklameprogramme sie verwirklichen soll, damit der durchschnittlich zu erwartende Gewinn pro Rechnungsperiode (oder, wie man in der Theorie der stufenweisen Programmierung auch sagt, pro Stufe) ein Maximum wird. Auf die Gründe für die Wahl dieser Zielfunktion wurde bereits an anderer Stelle eingegangen, es sei nur noch darauf hingewiesen, daß auch dann, wenn der Planungshorizont genauer abgeschätzt werden kann (etwa 10 Jahre bzw. 120 Monate), die Annahme einer unendlich großen Anzahl von Stufen eine sinnvolle Approximation darstellt[1]. Diese Frage nach dem langfristig optimalen Preis-, Produktions- und Reklameprogramm, wenn die Unternehmung sich in der Ausgangssituation I (d.h. es gelten (90) und (91)) befindet, läßt sich aber nur beantworten unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Frage nach dem optimalen Programm für den Fall, daß sich die Unternehmung zum Ende irgendeiner Periode (oder zu Beginn der darauf folgenden) in dem anderen für möglich gehaltenen Zustand befindet, was ja gemäß den Eigenschaften eines stochastischen Prozesses niemals ausgeschlossen werden kann. Anders ausgedrückt, es ist die langfristig optimale Politik (d.h. eine Sequenz von Entscheidungen im Sinne der stufenweisen Programmierung) der Unternehmung zu bestimmen, was nun mit Hilfe des HOWARD-Algorithmus geschehen soll.

---

1) Auf die Einführung eines Diskontfaktors, die leicht vorgenommen werden kann, wird hier verzichtet, da sich hierdurch weder für das betrachtete Problem noch für das Lösungsverfahren wesentliche neue Aspekte ergeben. Vgl. auch R.HOWARD, a.a.O., S. 73 ff.

(b) Durchführung der Rechenoperationen

In dem hier betrachteten Beispiel ist es naheliegend, zur Bestimmung einer Ausgangslösung die Programme e_1^1 und e_2^1 auszuwählen, da diese jeweils den größten erwarteten Gewinn der ersten Periode (oder Stufe) ergeben.

Die hierzu gehörenden Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Gewinne sind

$$\mathcal{P} = \left[p_{ij}(e_i^s)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathcal{Q} = \left[g_{ij}(e_i^s)\right] = \begin{bmatrix} 40 & 20 \\ 15 & -5 \end{bmatrix}$$

der Vektor der erwarteten Gewinne der ersten Periode ist dann

$$f = \left[f_i(e_i^s)\right] = \begin{bmatrix} 24 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aus dem System

$$g + a^i = f_i(e_i^s) + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}(e_i^s)\, a^j, \quad i = 1, 2, \ldots, M,$$

werden sodann die Werte für a^i bestimmt:

$$g + a^1 = 24 + 0{,}2\, a^1 + 0{,}8\, a^2$$

$$g + a^2 = 1 + 0{,}3\, a^1 + 0{,}7\, a^2.$$

Dieses Gleichungssystem hat zwei Gleichungen und drei Unbekannte, nämlich g, a^1 und a^2. Wir haben also einen Freiheitsgrad und können zur Bestimmung von g und a^1 z.B. die Unbekannte $a^2 = 0$ setzen.

Hiernach ergeben sich für

$g = 7{,}273$

und für

$a^1 = 20{,}918.$

Hierin ist a^1 praktisch der "Startwert" des Prozesses und g die Gewinnrate.

Von dieser Ausgangslösung ausgehend werden nun im nächsten Iterationsschritt die für g und a^1 bestimmten Werte in sämtliche Alternativen eingesetzt:

$f_i\,(e_i^s) + p_{i1}\,(e_i^s)\,a^1 + p_{i2}\,(e_i^s)\,a^2$
$f_1\,(e_1^1) + p_{11}\,(e_1^1)\,a^1 + p_{12}\,(e_1^1)\,a^2$
$f_1\,(e_1^2) + p_{11}\,(e_1^2)\,a^1 + p_{12}\,(e_1^2)\,a^2$
$f_1\,(e_1^3) + p_{11}\,(e_1^3)\,a^1 + p_{12}\,(e_1^3)\,a^2$
$f_2\,(e_2^1) + p_{21}\,(e_2^1)\,a^1 + p_{22}\,(e_2^1)\,a^2$
$f_2\,(e_2^2) + p_{21}\,(e_2^2)\,a^1 + p_{22}\,(e_2^2)\,a^2$
$f_2\,(e_2^3) + p_{21}\,(e_2^3)\,a^1 + p_{22}\,(e_2^3)\,a^2$

oder:

24 + 0,2 · 20,918 + 0,8 · 0	= 28,183
21 + 0,4 · 20,918 + 0,6 · 0	= 29,367
18 + 0,8 · 20,918 + 0,2 · 0	= 34,734 ←
1 + 0,3 · 20,918 + 0,7 · 0	= 7,275
0 + 0,5 · 20,918 + 0,5 · 0	= 10,459
0,5 + 0,9 · 20,918 + 0,1 · 0	= 18,326 ←

Vergleicht man die errechneten Werte der jeweiligen Alternativen in den möglichen Zuständen miteinander, so bieten sich als Grundlage für den nächsten Iterationsschritt in beiden Zuständen die dritte Alternative (also e_1^3 und e_2^3) an, die hier durch Pfeile gekennzeichnet sind. Die zugehörigen Matrizen sind dann

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 5 & -50 \end{bmatrix}$$

und

$$f = \begin{bmatrix} 18 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Werden hieraus in der bereits dargestellten Weise g und a^1 berechnet (a^2 wird wieder Null gesetzt), so ergibt sich wegen

$$g + a^1 = 18 + 0{,}8\, a^1 + 0{,}2\, a^2$$
$$g + a^2 = -0{,}5 + 0{,}9\, a^1 + 0{,}1\, a^2$$

für

$$g = 14{,}636$$

und

$$a^1 = 16{,}818.$$

Setzt man wieder ein, dann errechnet sich:

24 + 0,2 · 16,818 + 0,8 · 0	= 27,364	
21 + 0,4 · 16,818 + 0,6 · 0	= 27,727	
18 + 0,8 · 16,818 + 0,2 · 0	= 31,455	←
1 + 0,3 · 16,818 + 0,7 · 0	= 6,045	
0 + 0,5 · 16,818 + 0,5 · 0	= 8,409	
-0,5 + 0,9 · 16,818 + 0,1 · 0	= 14,636	←

Hier ergeben sich wiederum für e_1^3 und e_2^3 die größten Werte, was auch schon bei der vorhergehenden Iteration der Fall war. Das Optimalitätskriterium des HOWARD-Algorithmus ist also erfüllt. Die Gewinnrate g ist von 7,273 um mehr als das Doppelte auf 14,636 gestiegen.

(c) Interpretation der Modellergebnisse

Wir haben zu zeigen versucht, daß das Problem einer optimalen Kombination der Preis-, Produktionsprogramm- und Reklameplanung nur als stochastisches dynamisches Problem aufgefaßt werden kann, und gleichzeitig gezeigt, daß es sehr wohl möglich ist, insbesondere mit Hilfe des HOWARD-Algorithmus, dieses Problem auch einer praktischen Lösung zuzuführen.

Der dabei eingeschlagene Weg, die Nachfragesituation ausschließlich an Hand der Lage der Nachfragefunktionen

für die von der Unternehmung angebotenen Güter darzustellen, und die Verwendung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten als Grundlage für das Treffen von (zumeist einmaligen) Entscheidungen mag zunächst etwas abstrakt erscheinen. Tatsächlich hat aber eine solche Konzeption sowohl in theoretischer als auch in praktischer Hinsicht Vorteile, die es nahelegen, den hier eingeschlagenen Weg als den dem Problem der simultanen Preis-, Produktions- und Reklameplanung adäquaten anzusehen. Denn einmal lassen sich durch die Lage der Nachfragefunktionen sämtliche Marktformen erfassen, und zum anderen erscheint gerade die Konzeption der subjektiven Wahrscheinlichkeiten als besonders geeignet, den Entscheidungsprozeß des Unternehmers in der Realität zu beschreiben. Denn jedesmal, wenn ein Unternehmer den Eintritt eines Ereignisses als Reaktion auf seine eigene Entscheidung oder unter Berücksichtigung exogener Faktoren wie allgemeiner wirtschaftlicher und politischer Entwicklung, Änderungen der Präferenzstruktur und des Verhaltens von Abnehmern und Konkurrenzbetrieben usw. für 'sehr wahrscheinlich' oder 'durchaus möglich' hält, nimmt er eine Quantifizierung vor, die ihren Ausdruck in einer subjektiven Wahrscheinlichkeit als Beurteilungsgrundlage für die Möglichkeit des Eintritts eines bestimmten Ereignisses findet.

Das dargestellte Beispiel war darüber hinaus in besonderem Maße geeignet, den wesentlichen Unterschied zwischen einer statischen und einer dynamischen Betrachtungsweise aufzuzeigen. Denn das Ergebnis, daß es auf lange Sicht optimal ist, in jedem der möglichen Zustände das dritte, d.h. kurzfristig schlechteste, und nicht das 'COURNOT'sche Programm' zu verwirklichen, wäre bei einer statischen Analyse kaum möglich gewesen. Dies bedeutet nun aber nicht, daß das COURNOT'sche Theorem bei mehrstufigen Problemen, und insbesondere bei Einführung von Risiko,

nicht mehr gilt, es bedarf nur einer erweiterten Modifikation im Sinne des 'Optimalitätsprinzips' der stufenweisen (oder dynamischen) Programmierung. Genau wie sich der Differentialkalkül nahtlos in das System der mathematischen Programmierung einfügen läßt, läßt sich auch das COURNOT'sche Theorem als ein Spezialfall dem Optimalitätsprinzip unterordnen; denn eine optimale Politik, d.h. eine optimale Sequenz von Entscheidungen, ist im Falle eines mehrstufigen stochastischen Prozesses nichts anderes als eine erweiterte Interpretation des COURNOT'schen Theorems dahingehend, daß das (langfristig) optimale Preis-, Produktions- und Reklameprogramm dann gegeben ist, wenn der erwartete Grenzgewinn gleich ist dem durchschnittlich erwarteten Gewinn (beides bezogen auf die Zeit).

Schlußbemerkung

Aufgabe der vorliegenden Untersuchung war eine Analyse der sich bei der Bestimmung optimaler Produktionsprogramme in Mehrprodukt-Unternehmungen ergebenden Probleme, wenn die Nachfragemengen nach den von einer Unternehmung hergestellten und auf dem Markt angebotenen Gütern nicht genau bekannt, sondern Zufallsvariable sind, was, wie gezeigt werden konnte, bei den im praktischen Wirtschaftsleben häufig anzutreffenden marktorientierten Betrieben in aller Regel der Fall ist.

Hierzu war zunächst eine Klärung der Frage notwendig, ob das üblicherweise bei stochastischen Modellen geübte Vorgehen, den Erwartungswert des Gewinnes zu maximieren, bei der Planung des Produktionsprogrammes überhaupt eine sinnvolle unternehmerische Zielsetzung ist. Es konnte gezeigt werden, daß die Zielsetzung einer Maximierung des Erwartungswertes des Gewinnes unter gewissen Voraussetzungen durchaus mit der Konzeption eines rational handelnden Unternehmers konsistent sein kann.

Aufbauend hierauf und nach der Untersuchung des Problems, welche Möglichkeiten zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Nachfrage grundsätzlich bestehen, wobei insbesondere den bei einmaligen Entscheidungen so bedeutsamen subjektiven Wahrscheinlichkeiten besondere Aufmerksamkeit gewidmet wurde, sowie dem Aufzeigen der wesentlichsten Fundamentaleigenschaften und Lösungswege der im Rahmen der mathematischen Programmierung als dem problemadäquaten Verfahren entwickelten Methoden konnte zur Konstruktion von Entscheidungsmodellen zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme in Mehrprodukt-Unternehmungen bei stochastischer Nachfrage übergegangen werden. Hierbei wurde entsprechend dem Unterschied zwischen einer statischen und einer

dynamischen Betrachtungsweise zwischen einstufigen und mehrstufigen stochastischen Entscheidungsmodellen unterteilt. Es zeigte sich, daß, ausgehend vom bekannten Standardmodell der linearen Produktionsprogrammplanung, durch die Einführung stochastischer Nachfrage schon verhältnismäßig einfache Probleme der Produktionsprogrammplanung zu relativ komplizierten nichtlinearen Programmierungsaufgaben führen, wobei die Schwierigkeiten bei der Formulierung eines Modellansatzes und der Bestimmung eines geeigneten Lösungsverfahrens mit zunehmender Annäherung an praktische Verhältnisse sehr schnell steigen. Zuweilen mußte dabei auf Approximationsverfahren zurückgegriffen werden, aber das ist in einer Untersuchung, die sich die Aufgabe gestellt hat, nicht nur die ökonomischen Sachverhalte zu analysieren und in einem mathematischen Modell abzubilden, sondern auch auf praktische Lösungsverfahren hinzuweisen, eigentlich auch nicht überraschend. Da auch hier meist mehrere Wege zum Ziele führen, wurde auf einen Vergleich der zur Lösung eines Problems möglichen Verfahren besonderer Wert gelegt, wobei für die Auswahl eines bestimmten Verfahrens in erster Linie praktische Gesichtspunkte bestimmend waren.

Besondere Aufmerksamkeit wurde der Frage nach der Bestimmung des optimalen Preis-, Produktions- und Reklameprogrammes einer Mehrprodukt-Unternehmung geschenkt, einem Problem, das sich nur im Rahmen eines mehrstufigen stochastischen Entscheidungsmodelles lösen läßt. Der dabei eingeschlagene Weg, die Lagen der Nachfragefunktionen der von einer Unternehmung angebotenen Güter als Zustände eines stochastischen Prozesses aufzufassen, mag zunächst etwas zu abstrakt erscheinen, tatsächlich gelingt es aber über eine solche Konzeption, sowohl alle möglichen Marktformen als auch Nachfrageverschiebungen, saisonale Schwankungen usw. in einem mathe-

matischen Modell einzufangen, das sich, insbesondere mit Hilfe des HOWARD-Algorithmus, auch einer praktischen Lösung zuführen läßt. Verzichtet wurde vor allem auf eine spieltheoretische Formulierung der untersuchten Problemkreise, die zwar, vor allem über die Konzeption eines 'Spieles gegen die Natur', grundsätzlich immer möglich ist, jedoch sowohl vom theoretischen als auch vom praktischen Standpunkt aus als zu wenig operational nur selten befriedigen kann.

Während bei den einstufigen Entscheidungsmodellen zur Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei stochastischer Nachfrage die wesentlichsten bei der Programmplanung auftretenden Situationen behandelt werden konnten, wurde im Rahmen des mehrstufigen Modelles über die Konzeption des Ablaufes eines MARKOFF-Prozesses mit bekannten Übergangswahrscheinlichkeiten, bekannten Zuständen und bekannter analytischer Form der Zielfunktion der für die Bestimmung optimaler Preis-, Produktions- und Reklameprogramme nicht uninteressante Fall ausgeklammert, daß über die relevanten Zufallsvariablen, in unserem Falle die Nachfragemengen, ex ante nur sehr geringe Informationen vorliegen, und daß erst im Verlauf des Ablaufes des Prozesses zusätzliche Informationen über das Verhalten der Zufallsvariablen eingeholt werden müssen. Zwar läßt sich auch dieses Problem, insbesondere unter Zugrundelegung der im Rahmen der Theorie der adaptiven Prozesse entwickelten Theoreme, grundsätzlich lösen, allerdings ist hier die Entwicklung auf mathematischem Gebiet noch sehr im Fluß, und die bisher entwickelten Verfahren unterliegen derart strengen Einschränkungen[1], daß eine

1) Vgl. etwa R.BELLMAN, The Mathematical Theory of Control Processes, in: Modern Mathematics for the Engineer (Herausg.: E.F.BECKENBACH), New York-Toronto-London 1961, S. 194 ff., insbes. S. 204 ff.

Anwendung auf ökonomische Probleme nur in Spezialfällen möglich ist. Gerade als Betriebswirt sollte man jedoch die Entwicklung der Mathematik auf diesem für die Planung von Abläufen ökonomischer Prozesse zukunftsreichen und erfolgversprechenden Gebiet aufmerksam beobachten, und in dem Augenblick, wo die Aussicht besteht, hierdurch neue Erkenntnisse für die ökonomische Theorie zu gewinnen oder weitere Anwendungsbereiche für die praktische Unternehmungspolitik zu erschließen, diese mathematischen Verfahren in die Betriebswirtschaftslehre rezipieren. Sicherlich wird auch hierdurch das Problem der unternehmerischen Planung unter Ungewißheit im allgemeinen und das der Planung optimaler Produktionsprogramme im besonderen, nicht einfacher werden, aber schließlich kann das nur derjenige bedauern, "der sich von der ebenso ehrwürdigen wie falschen Devise des simplex sigillum veri leiten läßt"[1].

---

1) E.PREISER, Nochmals: Investition und Zins, in: Jahrbuch für Nationalökonomie und Statistik (171) 1959, S. 241 ff., hier S. 250 (zitiert bei L.PACK, Die Bestimmung der optimalen Leistungsintensität, a.a.O., S. 20).

LITERATURVERZEICHNIS

ABROMEIT, G. Erzeugnisplanung und Produktionsprogramm, Wiesbaden 1955

ACKOFF, R.L., GUPTA, K.S., MINAS, J.S. Scientific Method Optimizing Applied Research Decisions, New York - London 1962

ALBACH, H. Produktionsplanung auf der Grundlage technischer Verbrauchsfunktionen, in: Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (Heft 105), Köln-Opladen 1962, S. 45 ff.

ALBACH, H. Investition und Liquidität, Wiesbaden 1962

ANGERMANN, A. Entscheidungsmodelle, Frankfurt/M. 1963

ARROW, K.J., HURWICZ, L., UZAWA, H. Studies in Linear and Non-Linear Programming, Stanford, Cal. 1958

BARNETT, S. Stability of the Solution to a Linear Programming Problem, in: Op.Res. (10) 1962, S. 219 ff.

BARTELS, G. Diversifizierung, Die gezielte Ausweitung des Leistungsprogrammes der Unternehmung, Stuttgart 1966

BEALE, E.M.L. On Quadratic Programming, in: Nav. Res. Log. Quart. (6) 1959, S. 227 ff.

BECKMANN, M.J. Lineare Planungsrechnung, Linear Programming, Ludwigshafen 1959

BEER, ST. Kybernetik und Management, Frankfurt/M. 1963

BELLMAN, R. Some Problems in the Theory of Dynamic Programming, in: Econometrica (22) 1954, S. 37 ff.

BELLMAN, R. Bottleneck Problems, Functional Equations, and Dynamic Programming, in: Econometrica (23) 1955, S. 73 ff.

BELLMAN, R. Theory of Dynamic Programming, in: Modern Mathematics for the Engineer (Herausgeber: E.F. BECKENBACH), New York - Toronto - London 1961, S. 243 ff.

BELLMAN, R.	Dynamic Programming, Princeton, N.J. 1957
BELLMAN, R.	Adaptive Control Processes, Princeton, N.J. 1961
BELLMAN, R.	The Mathematical Theory of Control Processes, in: Modern Mathematics for the Engineer (Herausg.: E.F. BECKENBACH), New York - Toronto - London 1961, S. 194 ff.
BELLMAN, R., DREYFUS, ST.	Applied Dynamic Programming, Princeton, N.J. 1962
BLACKWELL, D., GIRSHICK, M.A.	Theory of Games and Statistical Decisions, 2. Aufl., New York - London 1961
BLASCHKA, B.	Betrachtungen zur industriellen Produktionsfunktion, in: ZfB (27) 1957, S. 436 ff.
BOOT, J.C.G.	Notes on Quadratic Programming: The Kuhn-Tucker and Theil-Van de Panne Conditions, Degeneracy, and Equality Constraints, in: Man.Sci. (8) 1961, S. 85 ff.
BOOT, J.C.G.	Quadratic Programming, Amsterdam 1965
BROSS, I.D.J.	Design for Decision, New York 1953
BROWN, R.G.	Statistical Forecasting for Inventory Control, New York - Toronto - London 1959
BURINGTON, R.ST. MAY, D.C.	Handbook of Probability and Statistics with Tables, Sandusky, O. 1958
CARR, C.R., HOWE, C.W.	Quantitative Decision Procedures in Management and Economics, New York - San Francisco - Toronto - London 1964
CHAMBERLIN, E.H.	The Theory of Monopolistic Competition, 6. Aufl., Cambridge, Mass. - London 1948
CHARNES, A., COOPER, W.W., HENDERSON, A.	An Introduction to Linear Programming, New York 1953

CHARNES, A., COOPER, W.W., MELLON, B.	A Model for Programming and Sensivity Analysis in an Integrated Oil Company, in: Econometrica (22) 1954, S. 192 ff.
CHARNES, A., LEMKE, C.	Minimization of Nonlinear Separable Convex Functions, in: Nav. Res. Log. Quart. (1) 1954, S. 301 ff.
CHERNOFF, H., MOSES, L.E.	Elementary Decision Theory, New York 1959
CHURCHMAN, C.W.	Decision and Value Theory, in: Progress in Operations Research, Bd. I (Herausg.: R.L.ACKOFF), New York 1961
COURTILLOT, M.	On Varying All the Parameters in a Linear Programming Problem and Sequential Solutions of a Linear Programming Problem, in: Op. Res. (10) 1962, S. 471 ff.
DANØ, S.	Linear Programming in Industry, Theory and Applications, Wien 1960
DANTZIG, G.B.	Recent Advances in Linear Programming, in: Man. Sci. (2) 1956, S. 131 ff.
DANTZIG, G.B.	On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables, in: Econometrica (28) 1960, S. 30 ff.
DANTZIG, G.B.	Linear Programming and Extensions, Princeton, N.J. 1963
DANTZIG, G.B.	Linear Programming under Uncertainty, in: Mathematical Studies in Management Science (Herausg.: A.F.VEINOTT, Jr.), New York - London 1965
DANTZIG, G.B., JOHNSON, S., WHITE, W.	A Linear Programming Approach to the Chemical Equilibrium Problem, in: Man. Sci. (4) 1958, S. 38 ff.
DANTZIG, G.B., WOLFE, P.	Decomposition Principle for Linear Programs, in: Op. Res. (8) 1960, S. 101 ff.
DEAN, J.	Managerial Economics, New York 1951

DINKELBACH, W., HAX, H. — Die Anwendung der gemischt-ganzzahligen Programmierung auf betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme, in: ZfhF (14) 1962, S. 181 ff.

DINKELBACH, W., STEFFENS, F. — Gemischt-ganzzahlige Programme zur Lösung gewisser Entscheidungsprobleme, in: Ufo (5) 1961, S. 3 ff.

DOOB, J.L. — Stochastic Processes, 5. Aufl., New York - London 1964

DORN, W.S. — On Lagrange Multipliers and Inequalities, in: Op. Res. (9) 1961, S. 95 ff.

DYNKIN, E.B. — Théorie des Processus Markoviens, Paris 1963

EBERL, W. — Stochastische Prozesse in der Regelungstheorie, in: Operations Research-Verfahren II (Herausg.: R.HENN), Meisenheim/Glan 1965, S. 162 ff.

ELSNER, K. — Mehrstufige Produktionstheorie und dynamisches Programmieren, Meisenheim/Glan 1964

EVERETT, H. — Generalized Lagrange Multiplier Method For Solving Problems of Optimum Allocation of Resources, in: Op. Res. (11) 1963, S. 399 ff.

FALKENHAUSEN, H.v. — Der Howard Algorithmus in Dynamic Programming, Prinzip und praktische Anwendung, in: Ablauf- und Planungsforschung (4) 1963, S. 183 ff.

FELLER, W. — An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 2. Aufl., New York - London 1961

FERSCHL, F. — Grundzüge des Dynamic Programming, in: Ufo (3) 1959, S. 70 ff.

FERSCHL, F. — Die Simplex-Methode zur Lösung linearer Programme, in: Anwendung der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme (Herausg.: A.ADAM u.a.), Wien-Würzburg 1959

FERSCHL, F. — Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse, Wien - Würzburg 1964

FÜRSTNER, K.	Betriebs- und volkswirtschaftliche Produktionsfunktionen, in: ZfB (32) 1962, S. 265 ff.
FRANK, M., WOLFE, P.	An Algorithm for Quadratic Programming, in: Nav. Res. Log. Quart. (3) 1956, S. 95 ff.
FREUND, R.J.	The Introduction of Risk into a Programming Model, in: Econometrica (24) 1956, S. 253 ff.
GALE, D.	The Theory of Linear Economic Models, New York - Toronto - London 1960
GARVIN, W.W.	Introduction to Linear Programming, New York - Toronto - London 1960
GASS, S.	Linear Programming, New York - Toronto - London 1958
GNEDENKO, B.W., CHINTSCHIN, A.J.	Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. Aufl., Berlin 1961
GOMORY, R.E., BAUMOL, W.J.	Integer Programming and Pricing, in: Econometrica (28) 1960, S. 521 ff.
GRIFFITH, R.E., STEWART, R.A.	A Nonlinear Programming Technique for the Optimization of Continuous Processing Systems, in: Man. Sci. (7) 1961, S. 379 ff.
GUTENBERG, E.	Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 1. Band: Die Produktion, 5. Aufl., Berlin - Göttingen- Heidelberg 1960; 10. Aufl., Berlin - Heidelberg - New York 1965
GUTENBERG, E.	Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 2. Band: Der Absatz, 4. Aufl., Berlin - Göttingen - Heidelberg 1962
GUTENBERG, E.	Anmerkungen zur Frage der Gestaltung industrieller Produktionsprogramme, in: ZfB (34) 1964, S. 667 ff.
HADLEY, G.	Linear Programming, Reading, Mass.-London 1962

HADLEY, G. — Nonlinear and Dynamic Programming, Reading, Mass. - Palo Alto - London 1964

HADLEY, G., WHITIN, T.M. — Analysis of Inventory Systems, Englewood Cliffs, N.J. 1963

HEINEN, E. — Anpassungsprozesse im Kokereibetrieb unter besonderer Berücksichtigung der quantitativen und intensitätsmäßigen Anpassung, in: ZfhF (7) 1955, S. 106 ff.

HEINEN, E. — Anpassungsprozesse und ihre kostenmäßigen Konsequenzen, Köln - Opladen 1957

HEINEN, E. — Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, Band I: Grundlagen, Wiesbaden 1959

HEINEN, E. — Die Zielfunktion der Unternehmung, in: Festschrift für E.GUTENBERG, Wiesbaden 1962

HERTZ, D.B., SCHAFFIR, K.H. — A Forecasting Method For Management of Seasonal Style-Goods Inventories, in: Op. Res. (8) 1960, S. 45 ff.

HILDRETH, A. — A Quadratic Programming Procedure, in: Nav. Res. Log. Quart. (4) 1957, S. 79 ff.

HOUTHAKKER, H.S. — The Capacity Method of Quadratic Programming, in: Econometrica (28) 1960, S. 62 ff.

HOWARD, R. — Dynamische Programmierung und Markov-Prozesse, Zürich 1965 (Deutsche Übersetzung von: Dynamic Programming and Markov Processes, New York - London 1960)

HUNDHAUSEN, C. — Wesen und Formen der Werbung, Essen 1954

JOKSCH, H.C. — Lineares Programmieren, Tübingen 1962

KADE, G. — Die logischen Grundlagen der mathematischen Wirtschaftstheorie als Methodenproblem der theoretischen Ökonomie, Berlin 1958

KADE, G. — Die Grundannahmen der Preistheorie, Berlin - Frankfurt/M. 1962

KATAOKA, S. — A Stochastic Programming Model, in: Econometrica (31) 1963, S. 181 ff.

KELLY, J.E. — Parametric Programming and the Primal-Dual Algorithm, in: Op. Res. (7) 1959, S. 327 ff.

KERN, W. — Die Empfindlichkeit linear geplanter Produktionsprogramme, in: Betriebsführung und Operations Research (Herausg.: A.ANGERMANN), Frankfurt/M. 1963, S. 66 ff.

KILGER, W. — Produktions- und Kostentheorie, in: Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1958

KLEIN, B. — Direct Use of Extremal Principles In Solving Certain Optimizing Problems Involving Inequalities, in: Op. Res. (3) 1955, S. 168 ff.

KOCH, H. — Betriebliche Planung, in: Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1961

KOCH, W. — Grundlagen und Technik des Vertriebes, Berlin 1950

KRELLE, W. — Unsicherheit und Risiko in der Preisbildung, Z.f.d.ges.Staatsw. (113) 1957, S. 635 ff.

KRELLE, W. — Ganzzahlige Programmierungen, Theorie und Anwendung in der Praxis, in: Ufo (2) 1958, S. 171 ff.

KRELLE, W., KÜNZI, H.P. — Lineare Programmierung, Zürich 1958

KRELLE, W. — Preistheorie, Tübingen 1961

KRELLE, W. — Gelöste und ungelöste Probleme der Unternehmensforschung, in: Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, (Heft 105), Köln - Opladen 1962, S. 7 ff.

KROMPHARDT, W., HENN, R., FÖRSTNER, K. — Lineare Entscheidungsmodelle, Berlin - Göttingen- Heidelberg 1962

KÜNZI, H.P., KRELLE, W. — Nichtlineare Programmierung, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1962

KÜNZI, H.P.	Nichtlineare Programmierung, in: Operations Verfahren I (Herausg.: R.HENN), Meisenheim/Glan 1963, S. 105 ff.
LAND, A.H., DOIG, A.G.	An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems, in: Econemetrica (28) 1960, S. 497 ff.
LASSMANN, G.	Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung für die betriebswirtschaftliche Kostentheorie, Köln - Opladen 1958
LEMKE, C.E.	A Method for Solution of Quadratic Programs, in: Man. Sci. (8) 1962, S. 442 ff.
LUCE, R.D., RAIFFA, H.	Games and Decisions, New York 1957
MADANSKY, A.	Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems, in: Man. Sci. (6) 1960, S. 197 ff.
MADANSKY, A.	Methods of Solution of Linear Programs under Uncertainty, in: Op. Res. (10) 1962, S. 463 ff.
MANNE, A.S.	Linear Programming and Sequential Decisions, in: Man. Sci. (6) 1960, S. 259 ff.
MARKOWITZ, H.M., MANNE, A.S.	On the Solution of Discrete Programming Problems, in: Econometrica (25) 1957, S. 84 ff.
MARSHAK, J.	Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility, in: Econometrica (18) 1950, S. 111 ff.
MELLEROWICZ, K.	Planung und Plankostenrechnung, Bd. I: Betriebliche Planung, Freiburg i.Br. 1961
MILLER, D.W., STARR, M.K.	Executive Decisions and Operations Research, Englewood Cliffs, N.J. 1960
MORGENSTERN, O.	Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft, Wien - München 1963
NEUMANN, J. von, MORGENSTERN, O.	Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961
PACK, L.	Rationalprinzip und Gewinnmaximierung, in: ZfB (31), S. 207 - 220 und 281 - 290

PACK, L. Produktions- und Kostentheorie (Vorlesung, gehalten im Wintersemester 1961/62 an der Universität zu Münster)

PACK, L. Maximierung der Rentabilität als preispolitisches Ziel, in: Festschrift für E.GUTENBERG, Wiesbaden 1962, S. 75 ff.

PACK, L. Die Bestimmung der optimalen Leistungsintensität, in: Z.f.d.ges. St. (119) 1963, S. 1 ff.

PACK, L. Die Elastizität der Kosten, Grundlagen einer entscheidungsorientierten Kostentheorie, Wiesbaden 1966

PACK, L. Die Ermittlung der kostenminimalen Anpassungsprozeßkombination - ein Anwendungsbeispiel der Dynamischen Programmierung, in: ZfbF (18) 1966, S. 466 ff.

PACK, L. Der Wandel im betriebswirtschaftlichen Denken, in: IBM-Nachrichten (16) 1966, S. 236 ff.

PARZEN, E. Stochastic Processes, 2. Aufl., San Francisco - London - Amsterdam 1964

PIESCH, W. Über einige Modelle der Absatzplanung, in: Ufo (3) 1959, S. 51 ff.

PONTRJAGIN, L.S. Mathematische Theorie optimaler Prozesse, München - Wien 1964

PREISER, E. Nochmals: Investition und Zins, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik (171) 1959, S. 241 ff.

RICHTER, H. Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1956

SAATY, T.L., BRAM, J. Nonlinear Mathematics, New York - San Francisco - Toronto - London 1964

SCHÄFER, E. Die Aufgabe der Absatzwirtschaft, Köln - Opladen 1950

SCHMETTERER, L. Einführung in die mathematische Statistik, Wiesbaden 1956

SCHNEIDER, E. — Eine Theorie der Reklame, in: Z.f.Nationalökonomie (9) 1939, S. 450 ff. (Wieder abgedruckt in: Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft, (Ausgewählte Aufsätze)), Tübingen 1964, S. 304 ff.

SCHNEIDER, E. — Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil, 6. verb. Aufl., Tübingen 1960

SCHNEIDER, E. — Bemerkungen zu einigen neueren Entwicklungen der Theorie der Unternehmung, in: Weltwirtschaftliches Archiv (83) 1959, S. 93 ff., (Wieder abgedruckt in: Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft (Ausgewählte Aufsätze)), Tübingen 1964, S. 447 ff.

SCHNEIDER, E. — Status - Der Weg der Betriebswirtschaftslehre in den letzten 25 Jahren, in: Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft, (Ausgewählte Aufsätze), Tübingen 1964, S. 452 ff.

SHACKLE, G.L.S. — Uncertainty in Economics and other Reflections, 2. Aufl., Cambridge 1955

SIMONNARD, M. — Programmation Linéaire, Paris 1962

SIMONS, E. — A Note on Parametric Linear Programming, in: Man. Sci. (8) 1962, S. 355 ff.

SOMMER, F. — Einführung in die Mathematik, Berlin - Göttingen- Heidelberg 1962

STACKELBERG, H.von — Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre, 2. Aufl., Tübingen - Zürich 1951

STARR, M.K., MILLER, D.W. — Inventory Control: Theory and Practice, Englewood Cliffs, N.J. 1962

SUNDHOFF, E. — Absatzorganisation, in: Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1958

TAKÁCS, L. — Stochastic Processes, 2. Aufl., London - New York 1962

TEREBESI, M.	Bemerkungen zum Verfahren von GOMORY zur Bestimmung ganzzahliger Lösungen von linearen Programmen, in: Ufo (5) 1961, S. 197 ff.
THEIL, H., VAN DE PANNE, C.	Quadratic Programming as an Extension of Classical Quadratic Maximization, in: Man. Sci. (7) 1961, S. 1 ff.
TINTNER, G.	A Note on Stochastic Linear Programming, in: Econometrica (28) 1960, S. 490 ff.
TINTNER, G.	Eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie von CARNAP auf ein Problem der Unternehmensforschung, in: Ufo (4) 1960, S. 164 ff.
TUCKER, A.W.	Linear and Nonlinear Programming, in: Op. Res. (5) 1957, S. 224 ff.
VAJDA, S.	Readings in Linear Programming, London 1958
VAJDA, S.	Mathematical Programming, Reading, Mass. - London 1961
VALIRON, G.	Théorie des Fonctions, 2. Aufl., Paris 1955
VAZSONYI, A.	Scientific Programming in Business and Industry, New York - London 1958
WALD, A.	Statistical Decision Functions, 5. Aufl., New York - London 1964
WEDEKIND, H.	Primal- und Dual-Algorithmen zur Optimierung von Markov-Prozessen, in: Ufo (8) 1964, S. 128 ff.
WHITE, C.M.	Multiple Goals in the Theory of the Firm, in: Linear Programming and the Theory of the Firm (Herausg.: K.E.BOULDING und W.A.SPIVEY), New York 1960
WITTMANN, W.	Unternehmung und unvollkommene Information, Köln - Opladen 1959
WÖHE, G.	Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, 4. Aufl., Berlin - Frankfurt/M. 1962
WOLFE, P.	The Simplex Method for Quadratic Programming, in: Econometrica (27) 1959, S. 382 ff.

WOLFE, P., DANTZIG, G.B. — Linear Programming in a Markov Chain, in: Op. Res. (10) 1962, S. 702 ff.

ZSCHOCKE, D. — Die Behandlung von Entscheidungsproblemen mit Hilfe des Dynamischen Programmierens, in: Ufo (8) 1964, S. 101 ff.

ZEITSCHRIFTEN - ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS

Man. Sci.	Management Science - Journal of the Institute of Management Sciences
Nav. Res. Log. Quart.	Naval Research Logistics Quarterly
Op. Res.	Operations Research - The Journal of the Operations Research Society of America
Ufo	Unternehmensforschung
ZfB	Zeitschrift für Betriebswirtschaft
Z. f. d. ges. Staatsw.	Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft
ZfhF	Schmalenbachs Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung (seit 1965: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung (ZfbF))
Z. f. Nat.	Zeitschrift für Nationalökonomie

Lebenslauf

Geboren wurde ich, Reinhard Kürbis, am 4. Juni 1938 in Dortmund als Sohn des Ingenieurs Helmut Kürbis und seiner Ehefrau Maria, geb. Jöhren. Ich bin deutscher Staatsangehöriger.

Nach dem Besuch der Volksschulen in Offenburg/Baden und Niedermarsberg/Westf. wurde ich im Frühjahr 1948 in die Sexta des Progymnasiums Marsberg aufgenommen. Im Jahre 1951 wechselte ich zum Helmholtz-Gymnasium in Dortmund, wo ich am 12. März 1957 die Reifeprüfung bestand. Nach einem halbjährigen Praktikum studierte ich an der Technischen Hochschule Aachen zunächst Ingenieurwissenschaften und Chemie (vom WS 1957/58 bis zum WS 1958/59) und anschließend Wirtschaftswissenschaften (SS 1959 und WS 1959/60). Im SS 1960 schrieb ich mich an der Westf. Wilhelms-Universität ein, wo ich am 6. November 1963 die Diplomprüfung für Kaufleute ablegte. Seit dem 1. Juni 1963 bin ich, zunächst als studentische Hilfskraft bei der Bearbeitung eines Forschungsauftrages, seit dem Diplom-Examen als wissenschaftlicher Mitarbeiter, seit dem 16. August 1966 als Verwalter einer planmäßigen Assistentenstelle und seit dem 1. Februar 1967 als Wissenschaftlicher Assistent ununterbrochen am Institut für industrielle Unternehmensforschung der Westf. Wilhelms-Universität Münster tätig.